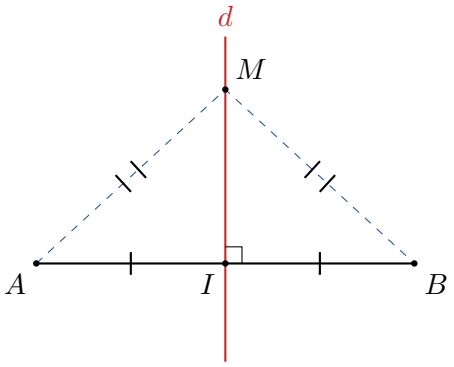
Droites remarquables du triangle et aires

Fiche de rappel – Médiatrices, médianes, hauteurs, aire d'un triangle (5e)

1. Médiatrice d'un segment

Définition

La **médiatrice** d'un segment $[AB]$ est la droite **perpendiculaire** à $[AB]$ qui passe par son **milieu**.



d est la médiatrice de $[AB]$:
- $IA = IB$
- $d \perp (AB)$

$M \in d$, donc $MA = MB$

Propriété caractéristique (à connaître dans les deux sens)

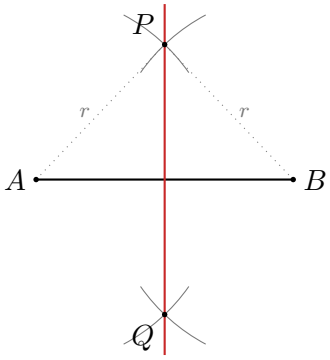
- Si un point M est sur la médiatrice de $[AB]$, alors $MA = MB$ (il est *équidistant* de A et B).
- Réciproquement, si $MA = MB$, alors M est sur la médiatrice de $[AB]$.

Constructions

Au compas (la construction attendue) :

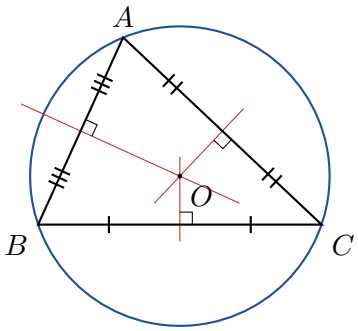
1. Ouvrir le compas d'un écartement **plus grand** que la moitié de AB.
2. Pointe en A : tracer un arc au-dessus et un arc en dessous de $[AB]$.
3. **Même écartement**, pointe en B : mêmes arcs.
4. Les arcs se coupent en deux points P et Q : la droite (PQ) est la médiatrice.
5. On **laisse les traits de construction**.

Avec l'équerre : placer le milieu I à la règle graduée, puis tracer la perpendiculaire à (AB) en I.



Dans un triangle : le cercle circonscrit

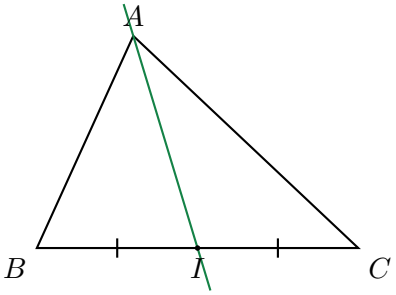
Les trois médiatrices des côtés d'un triangle sont **concourantes** (elles se coupent en un même point) en un point O.
Comme O est sur les trois médiatrices, $OA = OB = OC$: O est le **centre du cercle circonscrit** au triangle (cercle qui passe par les trois sommets).



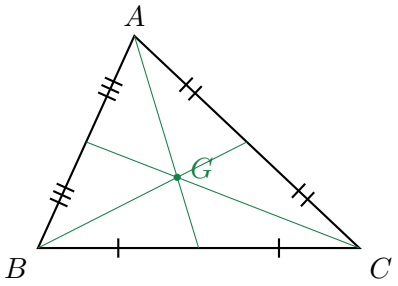
2. Médiane d'un triangle

Définition

Dans un triangle, une **médiane** est une droite qui passe par un **sommet** et par le **milieu du côté opposé**.
Vocabulaire : « la médiane *issue de* A » ou « la médiane *relative au côté* $[BC]$ ».



médiane issue de A



les trois médianes se coupent en G

À retenir

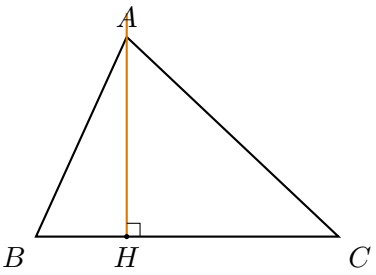
- Construction : placer le milieu I de $[BC]$ (règle graduée, ou au compas grâce à la médiatrice), puis tracer (AI).
- Les trois médianes sont concourantes en G, le **centre de gravité** du triangle.
- Pour aller plus loin : G est situé aux $\dfrac{2}{3}$ de chaque médiane en partant du sommet ($AG = \frac{2}{3}AI$).

3. Hauteur d'un triangle

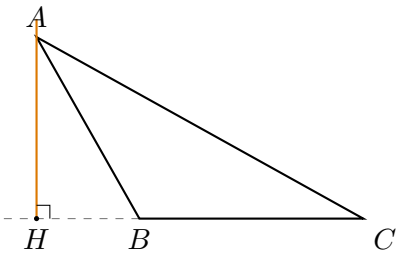
Définition

Dans un triangle, une **hauteur** est une droite qui passe par un **sommet** et qui est **perpendiculaire au côté opposé** (ou à la droite qui le porte).
Vocabulaire : « la hauteur *issue de* A », « la hauteur *relative au côté* $[BC]$ ». Le point H où elle coupe (BC) est le **pied de la hauteur**. Par abus, on appelle aussi « hauteur » la longueur AH.

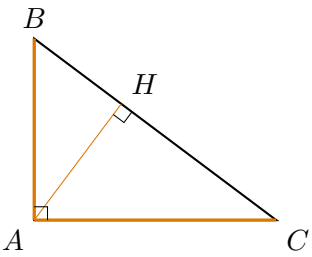
Construction à l'équerre : poser un côté de l'angle droit le long de (BC), faire glisser l'équerre jusqu'à ce que l'autre côté passe par A, tracer.



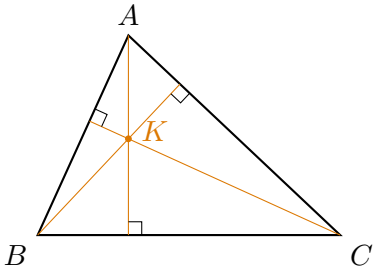
triangle aux angles aigus : H est sur le côté $[BC]$



angle obtus en B : on prolonge (BC), la hauteur issue de A est *à l'extérieur*



rectangle en A : $[AB]$ et $[AC]$ sont deux des hauteurs



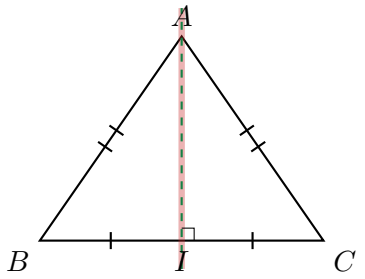
les trois hauteurs se coupent en K, l'**orthocentre**

4. Ne pas confondre !

	Passe par un sommet ?	Passe par un milieu ?	Angle droit ?	Point de concours
Médiatrice	pas forcément	**oui**	**oui**	centre du cercle circonscrit
Médiane	**oui**	**oui**	pas forcément	centre de gravité
Hauteur	**oui**	pas forcément	**oui**	orthocentre

Erreurs fréquentes

- Tracer la médiatrice « depuis le sommet opposé » : elle ne passe en général *pas* par le sommet.
- Confondre médiane (milieu) et hauteur (angle droit).
- Oublier de prolonger le côté pour une hauteur extérieure.
- Effacer les traits de construction au compas.



isocèle en A : médiatrice de $[BC]$, médiane et hauteur issues de A et axe de symétrie sont confondus

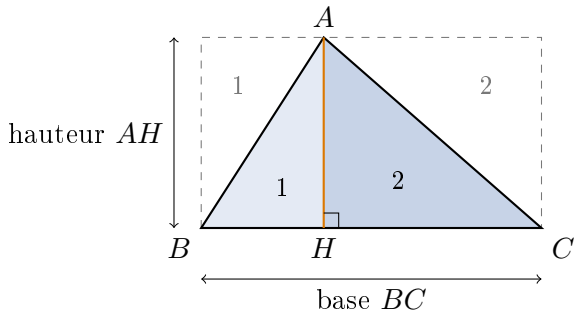
5. Aire d'un triangle

Formule

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

où la *hauteur* est la longueur de la hauteur **relative à la base choisie**.

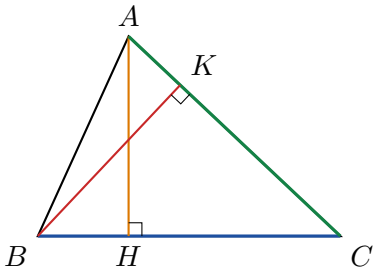
Pourquoi ? Le triangle est la moitié d'un rectangle



Chaque petit rectangle est coupé en deux triangles identiques par sa diagonale.

Donc l'aire du triangle ABC est la moitié de celle du rectangle : $\dfrac{BC \times AH}{2}$.

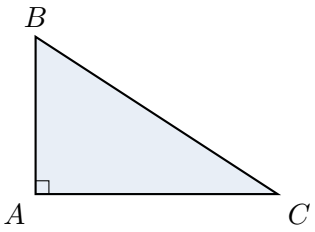
On peut choisir n'importe quel côté comme base



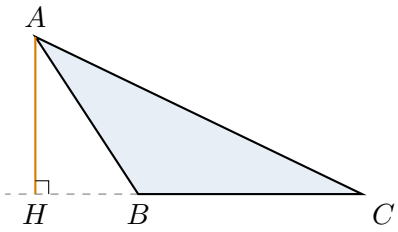
$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{AC \times BK}{2}$$

Le calcul donne le même résultat, à condition d'associer chaque base **à sa propre hauteur**.

Cas particuliers



rectangle en A :
$\mathcal{A} = \dfrac{AB \times AC}{2}$



angle obtus : la formule reste vraie avec la hauteur extérieure : $\mathcal{A} = \dfrac{BC \times AH}{2}$

Attention

- Ne pas multiplier deux côtés quelconques : la hauteur doit être **perpendiculaire** à la base.
- Ne pas oublier de **diviser par 2**.
- Unités cohérentes : longueurs en cm $\Rightarrow$ aire en cm^2.

Exemple direct. $BC = 6$ cm et $AH = 4$ cm : $\mathcal{A} = \dfrac{6 \times 4}{2} = 12\ \text{cm}^2$.

Exemple « à l'envers ». Un triangle a une aire de $24\ \text{cm}^2$ et un côté de 8 cm. La hauteur relative à ce côté vaut $h = \dfrac{2 \times 24}{8} = 6$ cm.

6. Mini-check avant l'interro

1. Donner sans regarder la définition de la médiatrice, de la médiane, de la hauteur.
2. Construire au compas la médiatrice d'un segment $[AB]$ de 7 cm.

3. Tracer un triangle ABC puis ses trois médianes ; nommer le point d'intersection.
4. Tracer un triangle ayant un angle obtus puis ses trois hauteurs (penser à prolonger les côtés).
5. Calculer l'aire d'un triangle de base 7,5 cm et de hauteur associée 4 cm. (réponse : 15 cm^2)
6. Un triangle d'aire 18 cm^2 a un côté de 9 cm : quelle est la hauteur relative à ce côté ? (réponse : 4 cm)