Problèmes concrets

Fiche d'exercices – second degré, suites, récurrence en situation (1re)

Mode d'emploi

Chaque exercice part d'une situation concrète. Avant de calculer, il faut **traduire** l'énoncé : qui est la variable ? que représente la fonction ou la suite ? quelle question mathématique se cache derrière la question posée ? À la fin, on **revient au contexte** : unités, valeurs entières, interprétation de la réponse. La calculatrice est autorisée.

1. Exercices

★ application directe ★★ une idée ou un calcul en plus ★★★ il faut prendre du recul

Second degré

Exercice 1 ★ *(La balle lancée du toit)* Depuis le toit d'un immeuble, on lance une balle vers le haut. Sa hauteur au-dessus du sol, en mètres, t secondes après le lancer, est

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 25.$$

a) Quelle est la hauteur de l'immeuble ?

b) Vérifier que $h(t) = -5(t-2)^2 + 45$. En déduire la hauteur maximale atteinte par la balle et l'instant où elle l'atteint.

c) Sans calcul, à quel instant la balle repasse-t-elle à la hauteur du toit ? Justifier.

d) Trouver une racine évidente de h, puis l'autre racine sans calculer Δ. À quel instant la balle touche-t-elle le sol ? Pourquoi écarte-t-on l'une des deux racines ?

e) Pendant combien de temps la balle est-elle à plus de 40 m du sol ?

Exercice 2 ★★ *(Le prix des crêpes)* Un food-truck vend ses crêpes 3 € pièce et en vend 200 par jour. Une étude montre que chaque augmentation de 10 centimes du prix fait perdre 5 ventes par jour. On note x le nombre d'augmentations de 10 centimes (entier, $0 \leqslant x \leqslant 40$).

a) Pour $x = 4$, donner le prix d'une crêpe, le nombre de crêpes vendues et la recette du jour.

b) Exprimer le prix et le nombre de ventes en fonction de x, puis montrer que la recette journalière vaut

$$R(x) = -0{,}5x^2 + 5x + 600.$$

c) Mettre $R(x)$ sous forme canonique. Quel prix rapporte la recette maximale ? Combien vaut-elle ?

d) Chaque crêpe coûte 1 € en ingrédients. Montrer que le bénéfice journalier vaut $B(x) = -0{,}5x^2 + 10x + 400$, puis déterminer le prix qui maximise le bénéfice. Est-ce le même que pour la recette ? Pourquoi ?

e) Le gérant veut un bénéfice d'au moins 432 € par jour. Entre quels prix peut-il choisir ?

Suites

Exercice 3 ★ *(Deux offres d'emploi)* À la sortie de ses études, Samia reçoit deux offres pour un contrat de longue durée.

- Offre A : 24 000 € la première année, puis une augmentation de 900 € chaque année.

- Offre B : 22 000 € la première année, puis une augmentation de 5 % chaque année.

On note a_n et b_n le salaire annuel de la $(n+1)$-ième année avec chaque offre : $a_0 = 24\,000$ et $b_0 = 22\,000$.

a) Calculer a_1, a_2, b_1 et b_2.

b) Préciser la nature des suites (a_n) et (b_n), puis exprimer a_n et b_n en fonction de n.

c) À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année le salaire de l'offre B dépasse celui de l'offre A.

d) Quelle offre rapporte le plus au total sur 10 ans ? Et sur 15 ans ? Commenter.

Rappels (sommes de N termes consécutifs) :

- suite arithmétique : $u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1} = N \times \dfrac{u_0 + u_{N-1}}{2}$;
- pour $q \neq 1$: $1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1} = \dfrac{q^N - 1}{q - 1}$.

Exercice 4 ★★ *(Le livret d'épargne)* Le 1er janvier 2026, Inès place 1 000 € sur un livret rémunéré à 4 % par an : le 31 décembre, la banque ajoute 4 % du montant présent. Chaque 1er janvier suivant, Inès verse 200 € de plus. On note u_n le montant du livret le 1er janvier de l'année $2026 + n$, après le versement. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}04\,u_n + 200$.

c) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

d) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6\,000 \times 1{,}04^n - 5\,000$.

e) En déduire le sens de variation de (u_n).

f) On veut savoir en quelle année le livret dépassera 10 000 €. Compléter la fonction Python ci-dessous, puis donner la réponse (à l'aide de la calculatrice ou de l'ordinateur).

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1000
    while ..... :
        n = .....
        u = .....
    return n
```

g) Ce jour-là, combien Inès aura-t-elle versé au total ? Combien les intérêts lui auront-ils rapporté ?

Exercice 5 ★★ *(Le traitement médical)* Un patient prend chaque matin un comprimé contenant 2 mg de principe actif. En 24 heures, son organisme élimine la moitié de la quantité de principe actif présente dans le sang. On note u_n la quantité (en mg) présente juste après la prise du $(n+1)$-ième jour. Ainsi $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 2$.

a) Calculer u_1, u_2 et u_3. Que peut-on conjecturer ?

b) Le principe actif devient dangereux au-delà de 5 mg. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_n < 4$. Le traitement présente-t-il un danger ?

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0{,}5\,(4 - u_n)$. En déduire le sens de variation de (u_n).

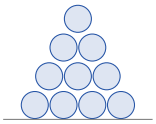
d) On pose $v_n = 4 - u_n$. Montrer que (v_n) est géométrique, puis exprimer u_n en fonction de n.

e) Le traitement est efficace lorsque la quantité dépasse 3,9 mg. À partir de quel jour est-ce le cas ?

f) Le médecin souhaite que la quantité se stabilise autour de 6 mg. Quelle dose quotidienne doit-il prescrire ?

Pour aller plus loin

Exercice 6 ★★ puis ★★★ *(La pyramide de canettes)* Dans un supermarché, un employé empile des canettes en pyramide : une canette dans la rangée du haut, et chaque rangée contient une canette de plus que celle du dessus. On note S_n le nombre total de canettes d'une pyramide de n rangées.



a) Calculer S_1, S_2, S_3, S_4. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n et de n.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

c) L'employé dispose de 500 canettes. Quel est le nombre maximal de rangées complètes qu'il peut construire, et combien de canettes lui reste-t-il alors ?

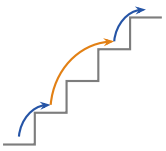
d) ★★★ Il veut maintenant utiliser **exactement** les 500 canettes. Il accepte que la rangée du haut contienne p canettes ($p \geqslant 1$), les rangées suivantes en contenant $p+1$, $p+2$, etc., avec $n \geqslant 2$ rangées.

i. Montrer que le nombre total de canettes vaut $\dfrac{n(2p+n-1)}{2}$.

ii. On pose $m = 2p+n-1$. Montrer que $nm = 1\,000$, que $m > n$, et que m et n n'ont pas la même parité.

iii. En déduire toutes les pyramides possibles.

Exercice 7 ★★★ *(L'escalier)* Pour monter un escalier, Tom monte à chaque pas une ou deux marches. On note e_n le nombre de façons différentes de monter un escalier de n marches. Par exemple, pour 3 marches : $1+1+1$, $1+2$ ou $2+1$, donc $e_3 = 3$.



4 marches : $1+2+1$

a) Déterminer e_1, e_2 et e_4 en écrivant toutes les possibilités.

b) En distinguant selon le premier pas de Tom, expliquer pourquoi, pour tout $n \geqslant 1$, $e_{n+2} = e_{n+1} + e_n$.

c) Combien y a-t-il de façons de monter un escalier de 12 marches ?

d) On cherche les réels $q > 0$ tels que la suite géométrique (q^n) vérifie la même relation : $q^{n+2} = q^{n+1} + q^n$ pour tout n. Montrer que $q^2 = q+1$, puis déterminer q. On note φ cette valeur.

e) Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$:

$$P(n) : \quad \text{« } e_n \geqslant \varphi^{n-1} \text{ et } e_{n+1} \geqslant \varphi^n \text{ ».}$$

Pourquoi a-t-on besoin de deux inégalités dans $P(n)$? Indication : utiliser $\varphi^2 = \varphi + 1$.

f) En déduire qu'il y a plus d'un million de façons de monter un escalier de 30 marches.

2. Corrections

Les exercices 1 à 3 sont rédigés en entier. Pour les suivants, on donne les étapes clés et les récurrences complètes.

Exercice 1.

a) À l'instant du lancer, $h(0) = 25$: l'immeuble mesure 25 m.

b) $-5(t-2)^2 + 45 = -5(t^2 - 4t + 4) + 45 = -5t^2 + 20t + 25 = h(t)$.
On lit $a = -5 < 0$ (parabole tournée vers le bas), $\alpha = 2$, $\beta = 45$: la balle atteint sa hauteur maximale de 45 m au bout de 2 s.

t	0		2		5
$h(t)$	25	↗	45	↘	0

c) La parabole est symétrique par rapport à la droite $t = \alpha = 2$. La balle est à 25 m à $t_1 = 0$, donc aussi à $t_2 = 2\alpha - t_1 = 4$: elle repasse à hauteur du toit au bout de 4 s.
Vérification : $h(4) = -80 + 80 + 25 = 25$.

d) $a - b + c = -5 - 20 + 25 = 0$, donc $t_1 = -1$ est racine. Le produit des racines vaut $\frac{c}{a} = \frac{25}{-5} = -5$, donc $(-1) \times t_2 = -5$, soit $t_2 = 5$. Ainsi $h(t) = -5(t+1)(t-5)$.
On écarte -1 car le temps est positif ($t \geqslant 0$) : la balle touche le sol au bout de 5 s.

e) On résout $h(t) > 40$ sur $[0, 5]$:

$$-5t^2 + 20t + 25 > 40 \iff -5t^2 + 20t - 15 > 0 \iff t^2 - 4t + 3 < 0$$

(on a divisé par $-5 < 0$, donc l'inégalité change de sens). Racine évidente 1 ($a + b + c = 0$), et le produit vaut 3, donc l'autre racine est 3. La parabole de $t^2 - 4t + 3$ est tournée vers le haut, donc elle est sous l'axe entre ses racines : $t \in]1, 3[$.
La balle est à plus de 40 m pendant $3 - 1 = 2$ secondes.

Exercice 2.

a) Prix : $3 + 4 \times 0{,}10 = 3{,}40$ €. Ventes : $200 - 4 \times 5 = 180$. Recette : $3{,}40 \times 180 = 612$ €.

b) Le prix vaut $3 + 0{,}1x$ et le nombre de ventes $200 - 5x$, donc

$$R(x) = (3 + 0{,}1x)(200 - 5x) = 600 - 15x + 20x - 0{,}5x^2 = -0{,}5x^2 + 5x + 600.$$

c) $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{-1} = 5$ et $\beta = R(5) = -12{,}5 + 25 + 600 = 612{,}5$, donc $R(x) = -0{,}5(x-5)^2 + 612{,}5$.
Comme $a = -0{,}5 < 0$, R est maximale pour $x = 5$: prix de 3,50 €, 175 crêpes vendues, recette de 612,50 €.

d) La marge sur une crêpe est $(3 + 0{,}1x) - 1 = 2 + 0{,}1x$, donc

$$B(x) = (2 + 0{,}1x)(200 - 5x) = 400 - 10x + 20x - 0{,}5x^2 = -0{,}5x^2 + 10x + 400.$$

$\alpha = -\frac{10}{-1} = 10$ et $B(10) = -50 + 100 + 400 = 450$. Le bénéfice est maximal pour un prix de 4 € (150 crêpes, 450 € de bénéfice).
Ce n'est pas le même prix : en vendant moins de crêpes, on gagne un peu moins de recette mais on économise les ingrédients. Augmenter le prix est donc plus intéressant pour le bénéfice que pour la recette.

e) On résout $B(x) \geqslant 432$:

$$-0{,}5x^2 + 10x + 400 \geqslant 432 \iff -0{,}5x^2 + 10x - 32 \geqslant 0 \iff x^2 - 20x + 64 \leqslant 0$$

(multiplication par $-2 < 0$). $\Delta = 400 - 256 = 144$, $x_1 = \frac{20-12}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{20+12}{2} = 16$. La parabole de $x^2 - 20x + 64$ est tournée vers le haut, donc négative entre les racines : $x \in [4, 16]$. Le prix doit être compris entre 3,40 € et 4,60 € (vérification : $B(4) = 2{,}4 \times 180 = 432$).

Exercice 3.

a) $a_1 = 24\,900$, $a_2 = 25\,800$; $b_1 = 22\,000 \times 1{,}05 = 23\,100$, $b_2 = 23\,100 \times 1{,}05 = 24\,255$.

b) On ajoute 900 chaque année : (a_n) est arithmétique de raison 900, et $a_n = 24\,000 + 900n$. Augmenter de 5 % revient à multiplier par 1,05 : (b_n) est géométrique de raison 1,05, et $b_n = 22\,000 \times 1{,}05^n$.

c) Avec la calculatrice (valeurs arrondies) :

n	4	5	6	7
a_n	27 600	28 500	29 400	30 300
b_n	26 741	28 078	29 482	30 956

$b_n > a_n$ dès $n = 6$, c'est-à-dire à partir de la 7e année (et ensuite l'écart ne fait que grandir).

d) Sur 10 ans, on additionne les termes d'indices 0 à 9 :

$$A_{10} = 10 \times \frac{24\,000 + 32\,100}{2} = 280\,500 \text{ €}, \qquad B_{10} = 22\,000 \times \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} \approx 276\,714 \text{ €}.$$

Sur 15 ans (indices 0 à 14) :

$$A_{15} = 15 \times \frac{24\,000 + 36\,600}{2} = 454\,500 \text{ €}, \qquad B_{15} = 22\,000 \times \frac{1{,}05^{15} - 1}{0{,}05} \approx 474\,728 \text{ €}.$$

Sur 10 ans, l'offre A rapporte plus, même si B la dépasse dès la 7e année : il faut du temps pour rattraper le retard des premières années. Sur 15 ans, l'offre B l'emporte nettement. Une suite géométrique de raison $q > 1$ (et de premier terme positif) finit toujours par dépasser une suite arithmétique.

Exercice 4.

a) $u_1 = 1\,000 \times 1{,}04 + 200 = 1\,240$; $\quad u_2 = 1\,240 \times 1{,}04 + 200 = 1\,489{,}6$.

b) Pendant l'année, le montant u_n est multiplié par 1,04 (intérêts), puis on ajoute 200 : $u_{n+1} = 1{,}04\,u_n + 200$.

c) $u_1 - u_0 = 240 \neq u_2 - u_1 = 249{,}6$: pas arithmétique. $\frac{u_1}{u_0} = 1{,}24 \neq \frac{u_2}{u_1} \approx 1{,}201$: pas géométrique.

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $u_n = 6\,000 \times 1{,}04^n - 5\,000$ ».
Initialisation. $6\,000 \times 1{,}04^0 - 5\,000 = 1\,000 = u_0$, donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned} u_{k+1} = 1{,}04\,u_k + 200 &\overset{\text{HR}}{=} 1{,}04\left(6\,000 \times 1{,}04^k - 5\,000\right) + 200 \\ &= 6\,000 \times 1{,}04^{k+1} - 5\,200 + 200 = 6\,000 \times 1{,}04^{k+1} - 5\,000, \end{aligned}$$

donc $P(k+1)$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6\,000 \times 1{,}04^n - 5\,000$.

e) $u_{n+1} - u_n = 6\,000 \times 1{,}04^n(1{,}04 - 1) = 240 \times 1{,}04^n > 0$: la suite est strictement croissante.

f) Fonction complétée :

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1000
    while u < 10000 :
        n = n + 1
        u = 1.04 * u + 200
    return n
```

On obtient $u_{23} \approx 9\,788{,}29$ et $u_{24} \approx 10\,379{,}82$: la fonction renvoie 24. Le livret dépasse 10 000 € le 1er janvier 2050.
Variante sans programme : $u_n \geqslant 10\,000 \iff 1{,}04^n \geqslant 2{,}5$, et on teste les puissances à la calculatrice.

g) Versements : $1\,000 + 24 \times 200 = 5\,800$ €. Intérêts : $10\,379{,}82 - 5\,800 \approx 4\,580$ €, soit presque autant que les versements.

Exercice 5.

a) $u_1 = 3$, $u_2 = 3{,}5$, $u_3 = 3{,}75$. On conjecture que (u_n) est croissante et se rapproche de 4.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $2 \leqslant u_n < 4$ ».
Initialisation. $u_0 = 2$, et $2 \leqslant 2 < 4$: $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leqslant u_k < 4$. On multiplie par $0{,}5 > 0$ puis on ajoute 2 :

$$1 \leqslant 0{,}5\,u_k < 2 \quad \text{donc} \quad 3 \leqslant 0{,}5\,u_k + 2 < 4, \quad \text{soit} \quad 3 \leqslant u_{k+1} < 4.$$

A fortiori $2 \leqslant u_{k+1} < 4$: $P(k+1)$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_n < 4$.
La quantité reste toujours sous 4 mg, donc sous le seuil de 5 mg : aucun danger.

c) $u_{n+1} - u_n = 0{,}5\,u_n + 2 - u_n = 2 - 0{,}5\,u_n = 0{,}5\,(4 - u_n)$. D'après b), $u_n < 4$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite est strictement croissante.

d) $v_{n+1} = 4 - u_{n+1} = 4 - 0{,}5\,u_n - 2 = 2 - 0{,}5\,u_n = 0{,}5\,(4 - u_n) = 0{,}5\,v_n$.
(v_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = 2$, donc $v_n = 2 \times 0{,}5^n$ et $u_n = 4 - 2 \times 0{,}5^n$.

e) $u_n > 3{,}9 \iff 2 \times 0{,}5^n < 0{,}1 \iff 0{,}5^n < 0{,}05$. Or $0{,}5^4 = 0{,}0625$ et $0{,}5^5 = 0{,}03125$, et $(0{,}5^n)$ est décroissante : c'est le cas à partir de $n = 5$, soit le 6e jour.

f) Avec une dose d, on a $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + d$. Une quantité stable ℓ vérifie $\ell = 0{,}5\,\ell + d$, soit $\ell = 2d$.
Pour $\ell = 6$, il faut $d = 3$ mg par jour.
Remarque : avec $d = 2$, on retrouve $\ell = 4$, la valeur dont u_n se rapproche.

Exercice 6.

a) $S_1 = 1$, $S_2 = 3$, $S_3 = 6$, $S_4 = 10$. La rangée $n+1$ contient $n+1$ canettes, donc $S_{n+1} = S_n + (n+1)$.

b) Pour $n \geqslant 1$, on note $P(n)$: « $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».
Initialisation. $\frac{1\times 2}{2} = 1 = S_1$.
Hérédité. Soit $k \geqslant 1$ tel que $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$. Alors

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) \overset{\text{HR}}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

c) On cherche le plus grand entier n tel que $\frac{n(n+1)}{2} \leqslant 500$, c'est-à-dire $n^2 + n - 1\,000 \leqslant 0$.
$\Delta = 1 + 4\,000 = 4\,001$, racines $\frac{-1 \pm \sqrt{4\,001}}{2}$, soit environ $-32{,}1$ et $31{,}1$. Le trinôme est négatif entre ses racines, donc pour $n \geqslant 1$ entier : $n \leqslant 31$.
L'employé construit 31 rangées, avec $S_{31} = \frac{31\times 32}{2} = 496$ canettes. Il en reste 4.

d) i. Les rangées contiennent p, $p+1$, …, $p+(n-1)$ canettes. Chaque rangée contient p plus un « supplément » de $0, 1, \dots, n-1$:

$$np + \big(1 + 2 + \cdots + (n-1)\big) = np + S_{n-1} = np + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(2p+n-1)}{2}.$$

ii. Le total vaut 500, donc $nm = 1\,000$. Puis $m - n = 2p - 1 \geqslant 1$, donc $m > n$. Enfin $m - n = 2p - 1$ est impair, donc m et n n'ont pas la même parité.

iii. $1\,000 = 2^3 \times 5^3$. Comme m et n n'ont pas la même parité, l'un des deux est impair, donc divise $5^3 = 125$.

- n impair, $n \geqslant 2$: $n \in \{5; 25; 125\}$, avec $m = 200$, 40, 8. La condition $m > n$ élimine $n = 125$.
- m impair : $m \in \{1; 5; 25; 125\}$, avec $n = 1\,000$, 200, 40, 8. Seul $m = 125$, $n = 8$ vérifie $m > n$.

On retrouve p avec $p = \frac{m-n+1}{2}$:

n (rangées)	m	p (rangée du haut)	vérification
5	200	98	$98 + 99 + 100 + 101 + 102 = 500$
8	125	59	$59 + 60 + \cdots + 66 = 8 \times \frac{59+66}{2} = 500$
25	40	8	$8 + 9 + \cdots + 32 = 25 \times \frac{8+32}{2} = 500$

Il y a exactement trois pyramides possibles (avec au moins deux rangées).

Exercice 7.

a) $e_1 = 1$ (un pas de 1). $e_2 = 2$: $1+1$ ou 2. $e_4 = 5$: $1+1+1+1$, $1+1+2$, $1+2+1$, $2+1+1$, $2+2$.

b) Pour monter $n+2$ marches, le premier pas est soit d'une marche (il reste $n+1$ marches : e_{n+1} façons de finir), soit de deux marches (il reste n marches : e_n façons). Les deux cas ne se recouvrent pas, donc $e_{n+2} = e_{n+1} + e_n$.

c) De proche en proche : $e_5 = 8$, $e_6 = 13$, $e_7 = 21$, $e_8 = 34$, $e_9 = 55$, $e_{10} = 89$, $e_{11} = 144$, $e_{12} = 233$.

d) $q^{n+2} = q^{n+1} + q^n \iff q^n(q^2 - q - 1) = 0 \iff q^2 - q - 1 = 0$ car $q^n \neq 0$.
$\Delta = 1 + 4 = 5$, racines $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Avec $q > 0$: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ (le nombre d'or).

e) *Initialisation.* $e_1 = 1 = \varphi^0$ et $e_2 = 2 \geqslant \varphi \approx 1{,}618$: $P(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \geqslant 1$ tel que $e_k \geqslant \varphi^{k-1}$ et $e_{k+1} \geqslant \varphi^k$. On veut : $e_{k+1} \geqslant \varphi^k$ et $e_{k+2} \geqslant \varphi^{k+1}$. La première inégalité fait partie de l'HR. Pour la seconde :

$$e_{k+2} = e_{k+1} + e_k \overset{\text{HR}}{\geqslant} \varphi^k + \varphi^{k-1} = \varphi^{k-1}(\varphi + 1) = \varphi^{k-1} \times \varphi^2 = \varphi^{k+1}.$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$; en particulier $e_n \geqslant \varphi^{n-1}$.
Pourquoi deux inégalités ? e_{k+2} dépend des **deux** termes précédents. Avec seulement « $e_k \geqslant \varphi^{k-1}$ » dans l'hypothèse, on ne pourrait pas minorer e_{k+1} dans l'hérédité.

f) $e_{30} \geqslant \varphi^{29} \approx 1\,149\,851 > 1\,000\,000$. (En calculant de proche en proche, on trouve $e_{30} = 1\,346\,269$.)

À retenir

- **Second degré en situation** : « maximum / minimum » → sommet (forme canonique) ; « au moins / au plus » → inéquation, résolue avec l'allure de la parabole. Toujours revenir aux contraintes du contexte ($t \geqslant 0$, x entier…).
- **Suites en situation** : « + constante » → arithmétique ; « × coefficient » ou « + p % » → géométrique ; les deux à la fois ($u_{n+1} = au_n + b$) → ni l'un ni l'autre, mais une récurrence ou une suite auxiliaire permet de conclure.
- **Récurrence** : l'hypothèse doit contenir tout ce dont l'hérédité a besoin (exercice 7).