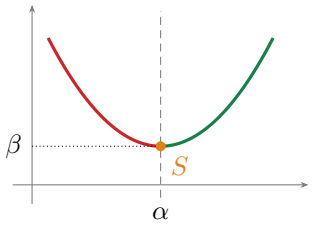
Le second degré

Fiche de cours – parabole, forme canonique, racines, signe, exercices corrigés (1re)

1. La parabole et la forme canonique

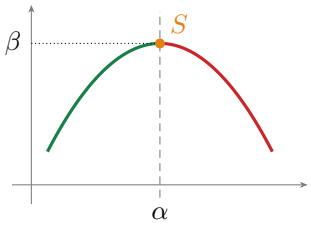
Une fonction polynôme du second degré s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Sa courbe est une **parabole**, et c'est le **signe de** a qui décide de son allure.

Deux allures possibles



x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	↘		β	↗	

$a > 0$ **: parabole tournée vers le haut**
sommet en bas : β est le **minimum**



x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	↗		β	↘	

$a < 0$ **: parabole tournée vers le bas**
sommet en haut : β est le **maximum**

En pointillés : l'**axe de symétrie** de la parabole, la droite verticale d'équation $x = \alpha$.
En rouge, les parties où f décroît ; en vert, celles où elle croît.

La forme canonique : lire le sommet directement

Forme canonique

Pour tout réel x :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad \text{avec} \qquad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

Le sommet de la parabole est $S(\alpha\,;\beta)$.

Exemple. $f(x) = 2(x-1)^2 - 3$.

- $a = 2 > 0$: parabole tournée vers le haut.
- $\alpha = 1$ et $\beta = -3$: sommet $S(1\,;-3)$.
- On en déduit directement le tableau de variations.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	↘		-3	↗	

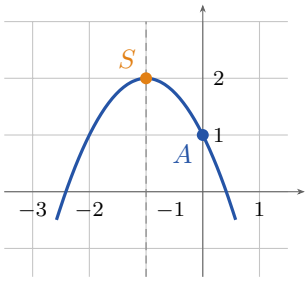
Attention au signe : dans $(x-1)^2$, on a $\alpha = 1$; dans $(x+2)^2 = \big(x-(-2)\big)^2$, on a $\alpha = -2$.

Dans l'autre sens : du graphique à la forme canonique

On lit sur le graphique :

1. le sommet $S(-1\,;2)$, donc $f(x) = a(x+1)^2 + 2$;
2. la parabole est tournée vers le bas, donc $a < 0$;
3. pour trouver a, on utilise un **autre point** de la courbe, ici $A(0\,;1)$:

$$f(0) = a \times 1^2 + 2 = 1 \iff a = -1.$$



Conclusion : $f(x) = -(x+1)^2 + 2$.

Un tableau de variations donne α, β et le signe de a, mais pas la valeur de a : il faut toujours un point de plus.

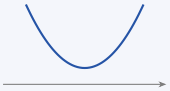
2. Racines, symétrie et signe

Les racines : où la parabole coupe l'axe des abscisses

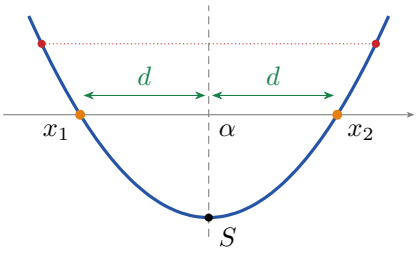
Les **racines** de f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Graphiquement, ce sont les abscisses des points où la parabole **coupe l'axe des abscisses**.

Le signe de Δ détermine le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Allure si $a > 0$			
Racines	deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	une racine : $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \alpha$	aucune racine

α est le milieu des deux racines



La parabole est **symétrique** par rapport à la droite $x = \alpha$: deux points à la même hauteur (en rouge) sont à la même distance de cet axe.
C'est le cas des deux racines, qui sont à la hauteur 0. Donc :

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Conséquences utiles

Somme des racines. On écrit α de deux façons :

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{et} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Trouver une racine à partir de l'autre. Grâce à l'égalité de gauche (α est le milieu des racines), si l'on connaît α et une racine x_1, on détermine l'autre racine :

$$x_2 = 2\alpha - x_1.$$

Produit des racines. $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Forme factorisée et tableau de signes

Forme factorisée

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$f(x) = a(x - x_0)^2$	pas de factorisation

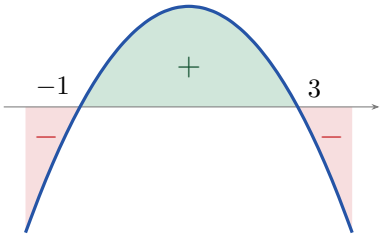
Ne pas oublier le coefficient a devant les parenthèses.

La forme factorisée donne le signe **facteur par facteur**.

Exemple. $f(x) = -(x+1)(x-3)$, avec $a = -1$ et les racines -1 et 3.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

la dernière ligne est l'avant-dernière multipliée par $a = -1$



$f(x) > 0$ là où la parabole est au-dessus de l'axe

À retenir : le signe d'un trinôme

- $\Delta > 0$: $f(x)$ est du **signe de a à l'extérieur des racines**, du signe contraire entre les racines.
- $\Delta = 0$: $f(x)$ est du signe de a, et s'annule en x_0.
- $\Delta < 0$: $f(x)$ est du signe de a pour tout x (la parabole ne touche pas l'axe).

3. Méthodes

Méthode 1 – Trouver la deuxième racine grâce à une racine évidente

1. Tester des valeurs simples : 0, 1, -1, 2, -2…
   Astuce : 1 est racine si $a+b+c=0$; -1 est racine si $a-b+c=0$.
2. Trouver l'autre racine avec le produit $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, ou avec $x_2 = 2\alpha - x_1$.
3. Factoriser : $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Exemple. $f(x) = 2x^2 - x - 3$, avec $a=2$, $b=-1$, $c=-3$.

- **Racine évidente** : $a-b+c = 2+1-3 = 0$, donc $x_1 = -1$ est racine.
- **Produit** :
$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \qquad \text{donc} \qquad (-1)\times x_2 = -\frac{3}{2}, \quad \text{soit} \quad x_2 = \frac{3}{2}.$$
- **Vérification avec α** :
$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad 2\alpha - x_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$
- **Factorisation** :
$$f(x) = 2(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = (x+1)(2x-3).$$

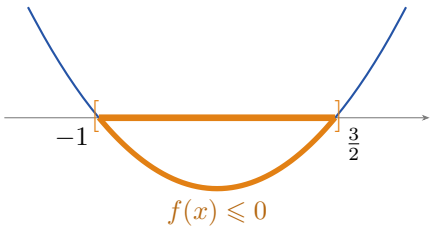
Méthode 2 – Résoudre une inéquation à l'aide du graphique

1. Tout passer du même côté pour comparer $f(x)$ à 0.
2. Trouver les racines (raccourci, racine évidente ou Δ).
3. Dessiner l'allure de la parabole : le signe de a donne son sens, les racines sont sur l'axe.
4. Lire les solutions : $f(x) \leqslant 0$ là où la courbe est **sous** l'axe (ou dessus), $f(x) \geqslant 0$ là où elle est **au-dessus**.
5. Soigner les crochets : fermés pour une inégalité large, ouverts pour une inégalité stricte.

Exemple. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x(2x-1) \leqslant 3$.

1. $x(2x-1) \leqslant 3 \iff 2x^2 - x - 3 \leqslant 0$.
2. Racines : -1 et $\frac{3}{2}$ (exemple précédent).
3. $a = 2 > 0$: parabole tournée vers le haut, qui coupe l'axe en -1 et $\frac{3}{2}$.
4. La courbe est sous l'axe entre les deux racines.
5. Inégalité large, donc crochets fermés :

$$\mathcal{S} = [-1, \tfrac{3}{2}].$$



en orange : la partie de la courbe sous l'axe et les x correspondants

Avec le même dessin : $2x^2 - x - 3 > 0 \iff x \in]-\infty, -1[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$.

Pour aller plus loin

Degré 3 : factoriser par $(x-r)$

Si r est une racine de P, alors

$$P(x) = (x-r)(ax^2+bx+c),$$

et on trouve a, b, c par **identification**.

Exemple : $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

- 1 est racine : $P(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$.
- On développe :
  $(x-1)(ax^2+bx+c)$
  $= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$.
- On identifie avec P :
  $a = 1$, $b - a = -2$, $c - b = -5$,
  d'où $b = -1$ et $c = -6$.
- $P(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)$
  $= (x-1)(x+2)(x-3)$.

Les racines sont -2, 1 et 3.

Degré 4 : poser $X = x^2$

L'équation $ax^4 + bx^2 + c = 0$ devient

$$aX^2 + bX + c = 0.$$

On revient ensuite à x avec $x^2 = X$, ce qui n'est possible que si $X \geqslant 0$.

Exemple : $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

- Avec $X = x^2$: $X^2 - 5X + 4 = 0$.
- $X = 1$ est racine évidente, et le produit vaut 4, donc l'autre est $X = 4$.
- $x^2 = 1 \iff x = \pm 1$.
- $x^2 = 4 \iff x = \pm 2$.

$\mathcal{S} = \{-2\,;-1\,;1\,;2\}$.

4. Exercices

★ application directe ★★ une idée ou un calcul en plus ★★★ il faut prendre du recul

Exercice 1 ★ Soit $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$.

a) Sans calcul, donner le sommet de la parabole, son allure et le tableau de variations de f.
b) Résoudre $f(x) = 0$ sans calculer Δ, puis vérifier que α est le milieu des racines.
c) En déduire la forme factorisée de $f(x)$ et son tableau de signes.

Exercice 2 ★ Résoudre dans $\mathbb{R}$, en s'aidant de l'allure de la parabole :

a) $x^2 - x - 6 > 0$ b) $-x^2 + 4x - 4 \geqslant 0$ c) $x^2 + x + 1 < 0$.

Exercice 3 ★★ *(Dans l'autre sens)*

a) Déterminer la fonction f du second degré dont la parabole a pour sommet $S(2\,;-1)$ et passe par le point $A(0\,;3)$.
b) Déterminer la fonction g du second degré dont la parabole coupe l'axe des abscisses en -1 et 5, et passe par le point $B(0\,;-10)$.
c) Sans développer $g(x)$, donner les coordonnées du sommet de la parabole de g.

Exercice 4 ★★ Soit $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.

a) Calculer $P(2)$.
b) Déterminer les réels a, b, c tels que, pour tout réel x, $P(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$.
c) Trouver une racine évidente de ax^2+bx+c, puis en déduire l'autre sans calculer Δ.
d) Résoudre $P(x) \geqslant 0$.

Exercice 5 ★★★ Déterminer tous les réels m tels que, pour tout réel x :

$$mx^2 + (m+1)x + m > 0.$$

Penser à traiter le cas $m = 0$ à part.

5. Corrections

Les exercices 1 et 2 sont rédigés en entier. Pour les suivants, on donne les étapes clés.

Exercice 1.

a) On lit la forme canonique : $a = -2 < 0$, donc la parabole est tournée vers le bas. Le sommet est $S(1\,;8)$, et 8 est le maximum de f, atteint en $x = 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	8	$\searrow$

b) On isole le carré :

$$-2(x-1)^2 + 8 = 0 \iff (x-1)^2 = 4 \iff x - 1 = 2 \text{ ou } x - 1 = -2 \iff x = 3 \text{ ou } x = -1.$$

Le milieu des racines est $\dfrac{-1+3}{2} = 1 = \alpha$: c'est bien l'abscisse du sommet.

c) Avec $a = -2$ et les racines -1 et 3 : $f(x) = -2(x+1)(x-3)$.
Comme $a < 0$, $f(x)$ est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles : la parabole, tournée vers le bas, est au-dessus de l'axe entre -1 et 3.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$ 0	$-$

Exercice 2.

a) $x^2 - x - 6 > 0$

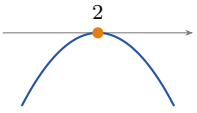
- Racines : $\Delta = 1 + 24 = 25$, $x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$, $x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$.
- Allure : $a = 1 > 0$, parabole tournée vers le haut.
- Lecture : la courbe est au-dessus de l'axe **à l'extérieur** des racines ; inégalité stricte, crochets ouverts.



$\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$.

b) $-x^2 + 4x - 4 \geqslant 0$

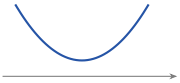
- Racine : $\Delta = 16 - 16 = 0$, $x_0 = -\frac{4}{2\times(-1)} = 2$ (en effet $-x^2 + 4x - 4 = -(x-2)^2$).
- Allure : $a = -1 < 0$, parabole tournée vers le bas, qui touche l'axe seulement en 2.
- Lecture : partout ailleurs, la courbe est sous l'axe ; elle n'est « au-dessus ou sur » l'axe qu'en $x = 2$.



$\mathcal{S} = \{2\}$.

c) $x^2 + x + 1 < 0$

- Racines : $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, aucune racine.
- Allure : $a = 1 > 0$, parabole tournée vers le haut, qui ne touche pas l'axe.
- Lecture : la courbe est entièrement au-dessus de l'axe, donc $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout x.



$\mathcal{S} = \varnothing$.

Exercice 3.

a) Le sommet donne $f(x) = a(x-2)^2 - 1$. Le point A donne $f(0) = 4a - 1 = 3$, donc $a = 1$: $f(x) = (x-2)^2 - 1$.

b) Les racines donnent $g(x) = a(x+1)(x-5)$. Le point B donne $g(0) = -5a = -10$, donc $a = 2$: $g(x) = 2(x+1)(x-5)$.

c) α est le milieu des racines : $\alpha = \dfrac{-1+5}{2} = 2$. Puis $\beta = g(2) = 2 \times 3 \times (-3) = -18$. Sommet $S(2\,;-18)$.

Exercice 4.

a) $P(2) = 16 - 12 - 6 + 2 = 0$.

b) $(x-2)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$. On identifie : $a = 2$, puis $b - 4 = -3$ donc $b = 1$, puis $c - 2 = -3$ donc $c = -1$ (et $-2c = 2$ convient). $P(x) = (x-2)(2x^2+x-1)$.

c) Pour $2x^2 + x - 1$: $a - b + c = 2 - 1 - 1 = 0$, donc -1 est racine. Le produit vaut $\frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$, donc l'autre racine est $\frac{1}{2}$. Ainsi $2x^2 + x - 1 = (x+1)(2x-1)$.

d) $P(x) = (x-2)(x+1)(2x-1)$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} = [-1, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty[$.

Exercice 5. *Cas* $m = 0$. L'expression vaut x, qui n'est pas toujours strictement positive (par exemple en $x = -1$). Donc $m = 0$ ne convient pas.

Cas $m \neq 0$. On a un trinôme de coefficient dominant m. Pensons à la parabole : elle est entièrement au-dessus de l'axe si et seulement si elle est tournée vers le haut **et** ne touche pas l'axe, c'est-à-dire $m > 0$ et $\Delta < 0$.

Or $\Delta = (m+1)^2 - 4m^2 = -3m^2 + 2m + 1 = (1-m)(3m+1)$. C'est un trinôme **en** m, de coefficient dominant $-3 < 0$ et de racines $-\frac{1}{3}$ et 1 : il est strictement négatif à l'extérieur de ses racines, soit pour $m < -\frac{1}{3}$ ou $m > 1$.

Avec la condition $m > 0$, on obtient :

$$\boxed{m \in]1, +\infty[}$$

À retenir

« $f(x) > 0$ pour tout x » se traduit graphiquement par « la parabole est tournée vers le haut et ne touche pas l'axe », donc $a > 0$ et $\Delta < 0$.