La démonstration par récurrence

Fiche de cours – principe, méthode de rédaction, exercices corrigés (1re)

1. Le principe de récurrence

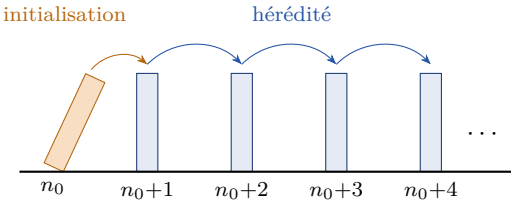
La récurrence permet de démontrer qu'une propriété $P(n)$, qui dépend d'un entier naturel n, est vraie pour **tous** les entiers à partir d'un rang n_0.

Principe de récurrence

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété définie pour tout entier $n \geqslant n_0$. Si :

- **initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
- **hérédité** : pour tout entier $k \geqslant n_0$, si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie ;

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.



L'initialisation fait tomber le premier domino.
L'hérédité garantit que chaque domino qui tombe fait tomber le suivant.
Donc tous les dominos tombent.

Attention

- Dans l'hérédité, on fixe *un* entier $k \geqslant n_0$ et on suppose $P(k)$ vraie : c'est l'**hypothèse de récurrence** (HR). On ne suppose jamais P vraie pour tous les entiers.
- **Les deux étapes sont indispensables.** Sans initialisation : « $10^n + 1$ est divisible par 9 » est héréditaire, mais fausse pour tout n. Sans hérédité : $n^2 + n + 41$ est premier pour $n = 0, 1, \ldots, 39$, mais $40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$.

2. Méthode de rédaction

Méthode – les quatre étapes

1. **Énoncer la propriété** : « Pour tout entier $n \geqslant n_0$, on note $P(n)$: … ».
2. **Initialisation** : vérifier $P(n_0)$ par un calcul direct.
3. **Hérédité** : « Soit $k \geqslant n_0$ tel que $P(k)$ est vraie. Montrons que $P(k+1)$ est vraie. » Écrire ce que l'on veut obtenir au rang $k+1$, puis faire apparaître le rang k pour utiliser l'HR.
4. **Conclusion** : « $P(n_0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$. »

Réflexe : si l'hypothèse de récurrence n'a pas servi dans l'hérédité, il y a probablement une erreur.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+2} - 3$.

Propriété. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $u_n = 2^{n+2} - 3$ ».

Initialisation. $2^{0+2} - 3 = 4 - 3 = 1 = u_0$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = 2^{k+2} - 3$. On veut montrer que $u_{k+1} = 2^{k+3} - 3$.

$$u_{k+1} = 2u_k + 3 \overset{\text{HR}}{=} 2\left(2^{k+2} - 3\right) + 3 = 2^{k+3} - 6 + 3 = 2^{k+3} - 3.$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+2} - 3$.

3. Exercices

★ application directe ★★ une idée ou un calcul en plus ★★★ il faut prendre du recul

Exercice 1 ★ Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Exercice 2 ★ Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + 1$.

Exercice 3 ★ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.
Rappel : un entier a est divisible par 3 s'il existe un entier m tel que $a = 3m$.

Exercice 4 ★ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geqslant n + 1$.

Exercice 5 ★★ Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 6 ★★

a) Vérifier que l'inégalité $2^n \geqslant n^2$ est fausse pour $n = 3$.
b) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 3$, $2k^2 \geqslant (k+1)^2$.
c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

Exercice 7 ★★ *(Inégalité de Bernoulli)* Soit x un réel tel que $x > -1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$. Où sert l'hypothèse $x > -1$?

Exercice 8 ★★ Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 3$.
b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 9 ★★★ Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$.

a) On veut montrer que $S_n \leqslant 2$ pour tout $n \geqslant 1$. Expliquer pourquoi une récurrence directe sur « $S_n \leqslant 2$ » bloque à l'hérédité.
b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$.
c) Conclure.

Exercice 10 ★★★ *(Trouver l'erreur)* Pour $n \geqslant 1$, on note $P(n)$: « dans tout groupe de n chevaux, tous ont la même couleur ».

- *Initialisation* : un groupe d'un seul cheval n'a qu'une couleur, donc $P(1)$ est vraie.
- *Hérédité* : soit $k \geqslant 1$ tel que $P(k)$ est vraie, et un groupe de $k + 1$ chevaux numérotés de 1 à $k + 1$. Les chevaux 1 à k forment un groupe de k chevaux : ils ont la même couleur. Les chevaux 2 à $k + 1$ aussi. Le cheval 2 appartient aux deux groupes, donc les $k + 1$ chevaux ont la même couleur.
- *Conclusion* : tous les chevaux ont la même couleur.

Le résultat est faux. Où est l'erreur ? Pour quelles valeurs de k l'hérédité est-elle correcte ?

4. Corrections

Les exercices 1 à 4 sont rédigés en entier. Pour les suivants, on donne les étapes clés, à rédiger sur le modèle de la méthode.

Exercice 1. Pour $n \geqslant 1$, on note $P(n)$: « $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$ ».
Initialisation. Pour $n=1$, la somme vaut 1 et $1^2=1$, donc $P(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \geqslant 1$ tel que $P(k)$ est vraie. Le terme qui suit $2k-1$ est $2(k+1)-1=2k+1$. On veut montrer que $1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$.

$$\underbrace{1+3+\cdots+(2k-1)}_{=k^2 \text{ (HR)}}+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $u_n = 3^n+1$ ».
Initialisation. $3^0+1=2=u_0$, donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k=3^k+1$. On veut montrer que $u_{k+1}=3^{k+1}+1$.

$$u_{k+1}=3u_k-2 \overset{\text{HR}}{=} 3\left(3^k+1\right)-2=3^{k+1}+3-2=3^{k+1}+1.$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n=3^n+1$.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « 4^n-1 est divisible par 3 ».
Initialisation. $4^0-1=0=3\times 0$, donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie : il existe un entier m tel que $4^k-1=3m$, c'est-à-dire $4^k=3m+1$. Alors

$$4^{k+1}-1=4\times 4^k-1 \overset{\text{HR}}{=} 4(3m+1)-1=12m+3=3(4m+1).$$

Comme $4m+1$ est un entier, $4^{k+1}-1$ est divisible par 3 : $P(k+1)$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 4^n-1 est divisible par 3.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $2^n \geqslant n+1$ ».
Initialisation. $2^0=1 \geqslant 0+1$, donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^k \geqslant k+1$. On veut montrer que $2^{k+1} \geqslant k+2$. En multipliant l'HR par $2>0$:

$$2^{k+1}=2\times 2^k \overset{\text{HR}}{\geqslant} 2(k+1)=2k+2 \geqslant k+2 \quad \text{car } k \geqslant 0.$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geqslant n+1$.

Exercice 5. Initialisation : pour $n=1$, $1^2=1$ et $(1\times 2\times 3)/6=1$. Hérédité : on ajoute $(k+1)^2$ et on **factorise par** $(k+1)$ plutôt que de tout développer :

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)\big(k(2k+1)+6(k+1)\big)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

car $2k^2+7k+6=(k+2)(2k+3)$. C'est bien la formule au rang $k+1$, puisque $2(k+1)+1=2k+3$.

Exercice 6.
a) $2^3=8<9=3^2$.
b) $2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=(k-1)^2-2 \geqslant 2^2-2=2>0$ pour $k \geqslant 3$.
c) Initialisation : $2^4=16 \geqslant 16=4^2$. Hérédité : pour $k \geqslant 4$, avec b), $2^{k+1}=2\times 2^k \overset{\text{HR}}{\geqslant} 2k^2 \geqslant (k+1)^2$.
Remarque : l'inégalité est vraie pour $n=0,1,2$, fausse pour $n=3$, puis vraie à partir de 4. Le rang $n_0=4$ est donc imposé.

Exercice 7. Initialisation : $(1+x)^0 = 1 \geqslant 1+0$. Hérédité : on multiplie l'HR par $1+x$, **strictement positif car** $x > -1$: c'est là que sert l'hypothèse, l'inégalité garde son sens.

$$(1+x)^{k+1} \overset{\text{HR}}{\geqslant} (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geqslant 1 + (k+1)x \quad \text{car } kx^2 \geqslant 0.$$

Exercice 8.

a) Initialisation : $u_0 = 1 \in]0,3[$. Hérédité : si $0 < u_k < 3$, alors $6 < u_k + 6 < 9$; la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc $\sqrt{6} < u_{k+1} < 3$, d'où $0 < u_{k+1} < 3$.

b) On note $Q(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1}$ ». Initialisation : $u_1 = \sqrt{7} \geqslant 1 = u_0$. Hérédité : si $u_k \leqslant u_{k+1}$, alors $u_k + 6 \leqslant u_{k+1} + 6$, et par croissance de la racine carrée, $u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$. La suite est croissante.

Exercice 9.

a) Si l'on sait seulement que $S_k \leqslant 2$, on obtient

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)^2} \overset{\text{HR}}{\leqslant} 2 + \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Ce majorant dépasse 2 : on ne peut pas conclure. L'hypothèse « $S_k \leqslant 2$ » ne laisse aucune marge pour absorber le terme ajouté.

b) On note $P(n)$: « $S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ ». Initialisation : $S_1 = 1 = 2 - \frac{1}{1}$. Hérédité : soit $k \geqslant 1$ tel que $S_k \leqslant 2 - \frac{1}{k}$. Alors

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)^2} \overset{\text{HR}}{\leqslant} 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Il suffit donc de montrer que $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Or

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \geqslant \frac{1}{(k+1)^2} \quad \text{car } 0 < k(k+1) \leqslant (k+1)^2.$$

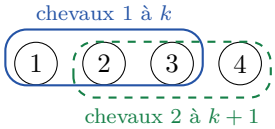
Donc $S_{k+1} \leqslant 2 - \frac{1}{k+1}$: $P(k+1)$ est vraie, et par récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

c) Pour tout $n \geqslant 1$, $S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n} < 2$.

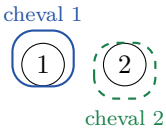
À retenir

Il est parfois plus facile de démontrer un résultat **plus fort**, car l'hypothèse de récurrence devient plus forte elle aussi. Ici, la marge $\frac{1}{k}$ est exactement ce qui absorbe le terme $\frac{1}{(k+1)^2}$.

Exercice 10. L'initialisation est correcte, et l'hérédité aussi pour $k \geqslant 2$: les groupes $\{1, \dots, k\}$ et $\{2, \dots, k+1\}$ ont en commun les chevaux 2 à k, qui transmettent la couleur. Pour $k = 1$ en revanche, le groupe de 2 chevaux se découpe en $\{1\}$ et $\{2\}$: le cheval 2 n'appartient pas au premier groupe, et les deux groupes n'ont **aucun cheval commun**. L'implication $P(1) \Rightarrow P(2)$ n'est donc pas démontrée : la chaîne casse dès le premier maillon.



$k = 3$: chevaux 2 et 3 en commun.



$k = 1$: aucun cheval en commun.

À retenir

L'hérédité doit être prouvée pour **tout** $k \geqslant n_0$, y compris le plus petit. Ici, il suffirait que $P(2)$ soit vraie pour que tout s'enchaîne ; mais $P(2)$ est fausse.