Fiche d'exercices – Stage de Seconde (2)

Équations, fonctions et lecture graphique

Équations & inéquations • **Fonctions** • **Lecture graphique** • **Problème**

Nom :	Prénom :	Date :

★ application directe ★★ une idée ou un calcul en plus ★★★ il faut prendre du recul

Partie 1 – Équations et inéquations

Exercice 1 ★ *(Équations)*

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $5x - 3 = 2x + 9$

b) $2(x-1) - 3(2-x) = x + 4$

c) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x-1}{4} = 1$

d) $(2x+1)(x-4) = 0$

e) $x^2 - 9 = 0$

f) $(x-2)^2 = 16$

g) $x^2 = 5x$

h) $(3x-1)^2 - (x+3)^2 = 0$

Exercice 2 ★ *(Équations avec des quotients)*

Donner la valeur interdite, puis résoudre.

a) $\dfrac{2x-1}{x+3} = 0$

b) $\dfrac{x+1}{x-2} = 3$

c) $\dfrac{1}{x} = 4$

d) $\dfrac{x^2-4}{x+2} = 0$

e) $\dfrac{3}{x-1} = \dfrac{2}{x+1}$ (deux valeurs interdites)

Exercice 3 ★ *(Inéquations)*

Résoudre et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

a) $3x - 7 > 5$

b) $-2x + 3 \leqslant 9$

c) $4(x+1) \geqslant 6x - 2$

d) $\dfrac{x+1}{3} < \dfrac{2x-1}{2}$

e) $-3 < 2x + 1 \leqslant 7$

Exercice 4 ★★ *(Tableaux de signes)*

Résoudre à l'aide d'un tableau de signes.

a) $(x-3)(2x+4) \geqslant 0$

b) $(5-x)(x+1) > 0$

c) $x^2 - 16 < 0$

d) $\dfrac{2x-6}{x+1} \leqslant 0$

e) $x^2 \geqslant 3x$

f) $\dfrac{x+2}{x-1} \geqslant 1$ (comparer à 0)

Exercice 5 ★★ *(Mettre en équation)*

1. Un rectangle a un périmètre de 30 cm, et sa longueur dépasse sa largeur de 3 cm. Quelles sont ses dimensions ?
2. Après une baisse de 20 %, un article coûte 56 €. Quel était son prix initial ?
3. Une salle de sport propose deux tarifs. Tarif A : 15 € la séance. Tarif B : un abonnement de 60 € puis 9 € la séance. À partir de combien de séances le tarif B est-il strictement plus avantageux ?

Exercice 6 ★★★ *(Ne pas diviser !)*

1. Résoudre $(x-1)(2x+3) = (x-1)(x+5)$.
   Un élève divise les deux membres par $x-1$ et trouve une seule solution, $x = 2$. Quelle est son erreur ?
2. Résoudre $(x-1)(2x+3) < (x-1)(x+5)$.
3. Résoudre $x^3 = 4x$.
4. Résoudre $\left(x^2-1\right)^2 = (x+1)^2$. *Indication :* $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

Partie 2 – Fonctions : calculs

Exercice 7 ★ *(Images et antécédents)*

On considère les fonctions $f(x) = 3x - 4$ et $g(x) = x^2 + 1$ définies sur $\mathbb{R}$, et $h(x) = \dfrac{2}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Calculer $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $g(-3)$, $g\left(\sqrt{3}\right)$, $h(3)$ et $h\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Déterminer les antécédents de 5 par f, par g et par h.
3. Le nombre 0 a-t-il des antécédents par g ? par h ? Justifier.
4. Les points $A(4\,;\,13)$, $B(-1\,;\,-1)$ et $C(2\,;\,2)$ appartiennent-ils respectivement aux courbes de g, de h et de f ?

Exercice 8 ★★ *(Choisir la bonne forme)*

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-3)^2 - 4$.

1. Développer $f(x)$, puis factoriser $f(x)$. On dispose ainsi de trois expressions de $f(x)$.
2. En choisissant à chaque fois l'expression la plus adaptée :
   a) calculer $f(0)$, $f(3)$ et $f\left(\sqrt{2}\right)$;
   b) déterminer les antécédents de 0, de 5, de -4 et de -5 ;
   c) résoudre $f(x) < 0$.
3. Montrer que pour tout réel x, $f(x) \geqslant -4$. Interpréter ce résultat.

Exercice 9 ★ *(Fonctions affines)*

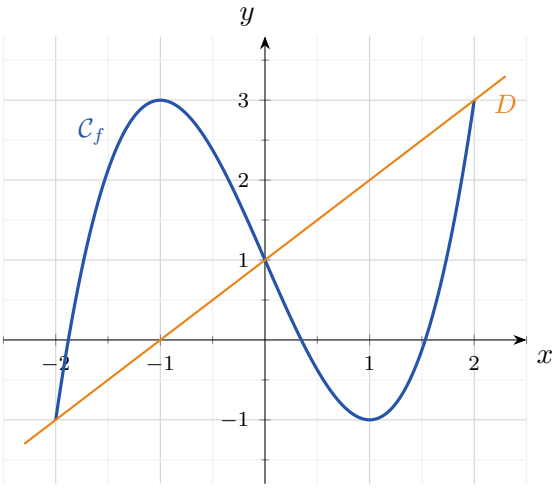
Soit g la fonction affine telle que $g(-1) = 7$ et $g(3) = -1$, et f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 1$.

1. Déterminer l'expression de $g(x)$.
2. Donner le sens de variation de f et de g, en justifiant.
3. Dresser le tableau de signes de $g(x)$.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites représentant f et g.
5. Résoudre $f(x) \leqslant g(x)$ et interpréter graphiquement.

Partie 3 – Lecture graphique

Exercice 10 ★ *(Lire sur une courbe)*

On a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[-2,2]$, et la droite D qui représente la fonction g définie par $g(x) = x + 1$.



1. Lire l'image de -1, de 0 et de 2 par f.
2. Lire les antécédents de 3, puis de -1 par f.
3. Combien l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle de solutions ? Encadrer chacune d'elles par deux entiers consécutifs.
4. Dresser le tableau de variations de f. Quels sont le maximum et le minimum de f sur $[-2,2]$? Pour quelles valeurs de x sont-ils atteints ?
5. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$, puis $f(x) \leqslant g(x)$.

Exercice 11 ★★ *(Raisonner avec un tableau de variations)*

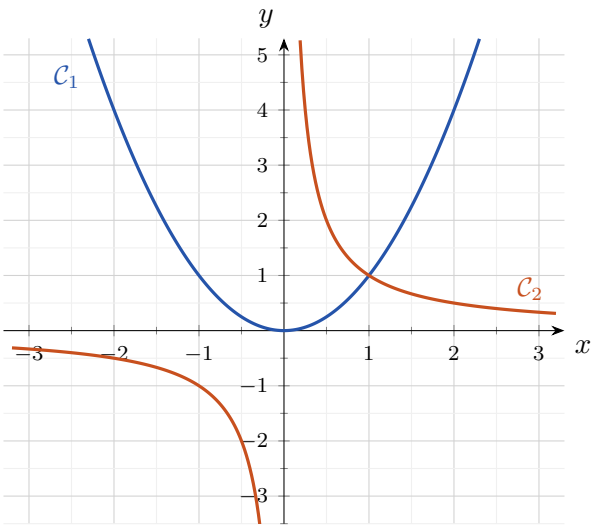
Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-4,5]$ (on ne connaît pas sa courbe).

x	-4		-1		2		5
$f(x)$	2	↗	5	↘	-3	↗	1

1. Quels sont le maximum et le minimum de f sur $[-4,5]$?
2. Comparer, lorsque c'est possible : $f(-3)$ et $f(-2)$; $f(0)$ et $f(1)$; $f(-4)$ et $f(3)$; $f(-2)$ et $f(4)$; $f(0)$ et $f(4)$.
3. Combien de solutions ont les équations $f(x) = 0$, $f(x) = 3$ et $f(x) = -4$?
4. Tracer une courbe qui pourrait représenter f.

Exercice 12 ★★ *(Fonctions carré et inverse)*

On a tracé les courbes des fonctions carré ($x \mapsto x^2$) et inverse ($x \mapsto \frac{1}{x}$).

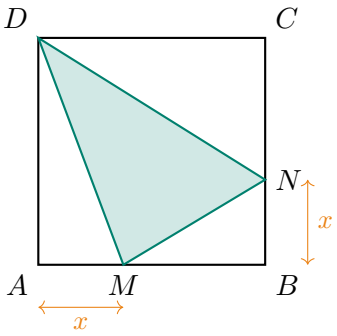


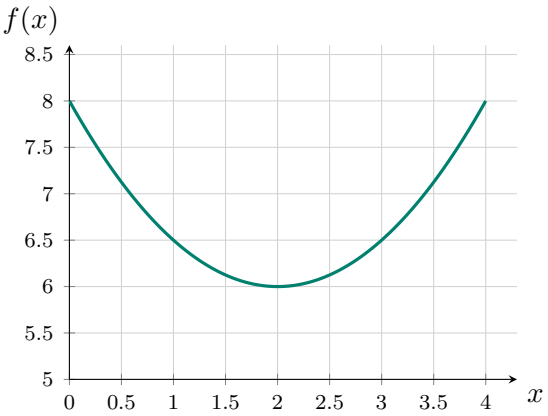
1. Quelle courbe représente la fonction carré ? la fonction inverse ?
2. Résoudre graphiquement : $x^2 = 4$; $x^2 < 1$; $\dfrac{1}{x} = 2$; $\dfrac{1}{x} > 1$; $x^2 = \dfrac{1}{x}$.
3. Retrouver par le calcul les solutions de $x^2 < 1$ et de $x^2 = \dfrac{1}{x}$.
4. À l'aide des courbes, compléter : si $x \in [-2,1]$, alors $x^2 \in \ldots$; si $x \in \left[\frac{1}{2},4\right]$, alors $\frac{1}{x} \in \ldots$; si $x \in [-3,-1]$, alors $\frac{1}{x} \in \ldots$

Partie 4 – Problème

Exercice 13 ★★★ *(L'aire d'un triangle dans un carré)*

$ABCD$ est un carré de côté 4 cm. Pour $x \in [0,4]$, on place le point M sur $[AB]$ tel que $AM = x$, et le point N sur $[BC]$ tel que $BN = x$. On note $f(x)$ l'aire, en cm², du triangle DMN.





1. Exprimer les aires des triangles ADM, MBN et NCD en fonction de x.
2. En déduire que $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 8$.
3. Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)^2 + 6$. En déduire la position de M pour laquelle l'aire du triangle DMN est minimale, et la valeur de cette aire.
4. À l'aide de la courbe ci-dessus, résoudre graphiquement $f(x) = 7$ et $f(x) \leqslant 6{,}5$.
5. Retrouver ces résultats par le calcul, en utilisant la forme de la question 3.
6. L'aire du triangle peut-elle être égale à la moitié de l'aire du carré ? au tiers ?

Corrections

Partie 1 – Équations et inéquations

Exercice 1

a) $3x = 12$, $S = \{4\}$.

b) $2x - 2 - 6 + 3x = x + 4$, soit $4x = 12$: $S = \{3\}$.

c) On multiplie par 12 : $4x - 3(x-1) = 12$, soit $x + 3 = 12$: $S = \{9\}$.

d) Produit nul : $2x + 1 = 0$ ou $x - 4 = 0$: $S = \left\{-\frac{1}{2}\,;\,4\right\}$.

e) $(x-3)(x+3) = 0$: $S = \{-3\,;\,3\}$.

f) $x - 2 = 4$ ou $x - 2 = -4$: $S = \{-2\,;\,6\}$.

g) $x^2 - 5x = 0$, $x(x-5) = 0$: $S = \{0\,;\,5\}$.

h) $(3x-1-x-3)(3x-1+x+3) = (2x-4)(4x+2) = 0$: $S = \left\{-\frac{1}{2}\,;\,2\right\}$.

Exercice 2

a) Valeur interdite -3. Un quotient est nul si son numérateur est nul : $2x - 1 = 0$, $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) Valeur interdite 2. $x + 1 = 3(x-2)$, soit $x + 1 = 3x - 6$, d'où $x = \frac{7}{2}$ (différent de 2) : $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

c) Valeur interdite 0. $1 = 4x$: $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

d) Valeur interdite -2. $x^2 - 4 = 0$ donne $x = 2$ ou $x = -2$, mais -2 est interdite : $S = \{2\}$.

e) Valeurs interdites 1 et -1. Produits en croix : $3(x+1) = 2(x-1)$, soit $3x + 3 = 2x - 2$, d'où $x = -5$: $S = \{-5\}$.

Exercice 3

a) $3x > 12$, $x > 4$: $S =]4, +\infty[$.

b) $-2x \leqslant 6$, $x \geqslant -3$ (on divise par $-2 < 0$, le sens change) : $S = [-3, +\infty[$.

c) $4x + 4 \geqslant 6x - 2$, $6 \geqslant 2x$, $x \leqslant 3$: $S =]-\infty, 3]$.

d) On multiplie par 6 : $2(x+1) < 3(2x-1)$, $2x + 2 < 6x - 3$, $5 < 4x$: $S = \left]\frac{5}{4}, +\infty\right[$.

e) On retire 1 : $-4 < 2x \leqslant 6$; on divise par 2 : $-2 < x \leqslant 3$: $S =]-2, 3]$.

Exercice 4

a) $x - 3$ s'annule en 3, $2x + 4$ en -2 :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x + 4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)(2x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[$.

b) $5 - x$ est positif pour $x < 5$, et $x + 1$ pour $x > -1$. Le produit est strictement positif entre -1 et 5 : $S =]-1, 5[$.

c) $(x-4)(x+4) < 0$: le produit est négatif entre les racines : $S =]-4, 4[$.

d) $2x - 6$ s'annule en 3 ; -1 est une valeur interdite (double barre dans le tableau). Le quotient est négatif ou nul pour $x \in]-1, 3]$: $S =]-1, 3]$.

e) $x^2 - 3x \geqslant 0$, $x(x-3) \geqslant 0$: $S =]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$.

f) $\dfrac{x+2}{x-1} - 1 \geqslant 0 \iff \dfrac{x+2-(x-1)}{x-1} \geqslant 0 \iff \dfrac{3}{x-1} \geqslant 0 \iff x - 1 > 0$: $S =]1, +\infty[$.
Attention : multiplier par $x - 1$ serait une erreur, car on ne connaît pas son signe.

Exercice 5

1. Largeur ℓ, longueur $\ell+3$: $2(\ell+\ell+3)=30$, soit $4\ell+6=30$, $\ell=6$. Le rectangle mesure 6 cm sur 9 cm.
2. Baisser de 20 % revient à multiplier par 0,8 : $0{,}8\,P=56$, $P=70$ €.
3. Pour n séances : tarif A $15n$, tarif B $60+9n$. $60+9n<15n \iff 60<6n \iff n>10$.
   Le tarif B est strictement plus avantageux à partir de 11 séances (à 10 séances, les deux coûtent 150 €).

Exercice 6

1. $(x-1)(2x+3)-(x-1)(x+5)=0 \iff (x-1)\big[(2x+3)-(x+5)\big]=0 \iff (x-1)(x-2)=0$: $S=\{1\,;\,2\}$.
   L'élève a divisé par $x-1$, qui vaut 0 lorsque $x=1$: il a perdu la solution $x=1$.
2. On se ramène à $(x-1)(x-2)<0$: le produit est négatif entre 1 et 2 : $S=]1{,}2[$.
3. $x^3-4x=0 \iff x\big(x^2-4\big)=0 \iff x(x-2)(x+2)=0$: $S=\{-2\,;\,0\,;\,2\}$.
4. $\big(x^2-1\big)^2=(x-1)^2(x+1)^2$, donc l'équation s'écrit $(x+1)^2\big[(x-1)^2-1\big]=0$.
   Or $(x-1)^2-1=(x-1-1)(x-1+1)=x(x-2)$. On obtient $(x+1)^2\,x\,(x-2)=0$: $S=\{-1\,;\,0\,;\,2\}$.

Partie 2 – Fonctions : calculs

Exercice 7

1. $f(-2)=-10$, $f\big(\frac{1}{3}\big)=-3$, $g(-3)=10$, $g\big(\sqrt{3}\big)=4$, $h(3)=1$, $h\big(\frac{1}{2}\big)=\dfrac{2}{-\frac{1}{2}}=-4$.
2. Par f : $3x-4=5$, $x=3$. Par g : $x^2=4$, $x=-2$ ou $x=2$. Par h : $\dfrac{2}{x-1}=5$, $x-1=\dfrac{2}{5}$, $x=\dfrac{7}{5}$.
3. Par g : $x^2+1=0$ donne $x^2=-1$, impossible : 0 n'a pas d'antécédent. Par h : un quotient de numérateur 2 ne peut pas être nul : pas d'antécédent non plus.
4. $g(4)=17\neq 13$: A n'est pas sur la courbe de g. $h(-1)=\dfrac{2}{-2}=-1$: B est sur la courbe de h. $f(2)=2$: C est sur la courbe de f.

Exercice 8

1. Forme développée : $f(x)=x^2-6x+9-4=x^2-6x+5$.
   Forme factorisée : $f(x)=(x-3)^2-2^2=(x-3-2)(x-3+2)=(x-5)(x-1)$.
2. **a)** $f(0)=5$ (forme développée), $f(3)=-4$ (forme de l'énoncé), $f\big(\sqrt{2}\big)=2-6\sqrt{2}+5=7-6\sqrt{2}$ (forme développée).
   b) Antécédents de 0 : $(x-5)(x-1)=0$, donc 1 et 5. De 5 : $x^2-6x=0$, $x(x-6)=0$, donc 0 et 6. De -4 : $(x-3)^2=0$, donc 3. De -5 : $(x-3)^2=-1$, impossible : aucun antécédent.
   c) $(x-5)(x-1)<0$: le produit est négatif entre 1 et 5 : $S=]1{,}5[$.
3. Un carré est positif : $(x-3)^2\geqslant 0$, donc $f(x)\geqslant -4$. Comme $f(3)=-4$, la fonction f admet un minimum égal à -4, atteint en $x=3$.

Exercice 9

1. $g(x)=ax+b$ avec $a=\dfrac{g(3)-g(-1)}{3-(-1)}=\dfrac{-8}{4}=-2$. Puis $g(-1)=2+b=7$, $b=5$: $g(x)=-2x+5$.
2. g est décroissante car $a=-2<0$; f est croissante car son coefficient directeur $\frac{1}{2}$ est positif.
3. $g(x)=0 \iff x=\frac{5}{2}$; g décroît, donc $g(x)>0$ sur $\big]-\infty,\frac{5}{2}\big[$ et $g(x)<0$ sur $\big]\frac{5}{2},+\infty\big[$.
4. $\frac{1}{2}x-1=-2x+5 \iff \frac{5}{2}x=6 \iff x=\frac{12}{5}$, et $f\big(\frac{12}{5}\big)=\frac{6}{5}-1=\frac{1}{5}$. Point d'intersection : $\big(\frac{12}{5}\,;\,\frac{1}{5}\big)$.
5. $\frac{1}{2}x-1\leqslant -2x+5 \iff \frac{5}{2}x\leqslant 6 \iff x\leqslant \frac{12}{5}$: $S=\big]-\infty,\frac{12}{5}\big]$. La droite de f est en dessous de celle de g à gauche de leur point d'intersection.

Partie 3 – Lecture graphique

Exercice 10

1. $f(-1) = 3$, $f(0) = 1$, $f(2) = 3$.
2. Antécédents de 3 : -1 et 2. Antécédents de -1 : -2 et 1.
3. La courbe coupe trois fois l'axe des abscisses : trois solutions, situées dans $]-2,-1[$, $]0{,}1[$ et $]1{,}2[$.
4. Tableau de variations de f :

x	-2		-1		1		2
$f(x)$	-1	↗	3	↘	-1	↗	3

   Le maximum de f est 3, atteint en -1 et en 2. Le minimum est -1, atteint en -2 et en 1.
5. $f(x) = g(x)$: abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et D : $S = \{-2\,;\,0\,;\,2\}$.
   $f(x) \leqslant g(x)$: $\mathcal{C}_f$ est en dessous de D ou la coupe : $S = \{-2\} \cup [0{,}2]$ (en -2 les deux courbes se coupent, puis $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de D sur $]-2{,}0[$).

Exercice 11

1. Maximum : 5 (atteint en -1). Minimum : -3 (atteint en 2).
2. f est croissante sur $[-4,-1]$ et $-3 < -2$, donc $f(-3) \leqslant f(-2)$.
   f est décroissante sur $[-1{,}2]$ et $0 < 1$, donc $f(0) \geqslant f(1)$.
   $f(-4) = 2$, et sur $[2{,}5]$, $f(x) \leqslant 1$: donc $f(3) \leqslant 1 < 2 = f(-4)$.
   Sur $[-4,-1]$, $f(x) \geqslant 2$, donc $f(-2) \geqslant 2$; et $f(4) \leqslant 1$: donc $f(4) < f(-2)$.
   $f(0)$ est entre -3 et 5, $f(4)$ entre -3 et 1 : on ne peut pas comparer.
3. $f(x) = 0$: aucune solution sur $[-4,-1]$ (valeurs entre 2 et 5), une sur $[-1{,}2]$ (f passe de 5 à -3), une sur $[2{,}5]$ (f passe de -3 à 1) : deux solutions.
   $f(x) = 3$: une solution sur $[-4,-1]$, une sur $[-1{,}2]$, aucune sur $[2{,}5]$: deux solutions.
   $f(x) = -4$: aucune solution, car -4 est inférieur au minimum -3.
4. Toute courbe qui monte de $(-4\,;\,2)$ à $(-1\,;\,5)$, descend jusqu'à $(2\,;\,-3)$, puis remonte jusqu'à $(5\,;\,1)$ convient.

Exercice 12

1. $\mathcal{C}_1$ (parabole) représente la fonction carré, $\mathcal{C}_2$ (hyperbole) la fonction inverse.
2. $x^2 = 4$: $S = \{-2\,;\,2\}$. $x^2 < 1$: $S =]-1{,}1[$. $\frac{1}{x} = 2$: $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. $\frac{1}{x} > 1$: $S =]0{,}1[$. $x^2 = \frac{1}{x}$: $S = \{1\}$.
3. $x^2 < 1 \iff x^2 - 1 < 0 \iff (x-1)(x+1) < 0 \iff x \in]-1{,}1[$.
   $x^2 = \frac{1}{x}$ (avec $x \neq 0$) $\iff x^3 = 1 \iff x = 1$.
4. Si $x \in [-2{,}1]$, alors $x^2 \in [0{,}4]$ (attention : 0 est atteint en $x = 0$). Si $x \in \left[\frac{1}{2}{,}4\right]$, alors $\frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{4}{,}2\right]$. Si $x \in [-3,-1]$, alors $\frac{1}{x} \in \left[-1,-\frac{1}{3}\right]$.

Partie 4 – Problème

Exercice 13

1. ADM est rectangle en A : aire $\dfrac{4x}{2} = 2x$. MBN est rectangle en B, avec $MB = 4 - x$ et $BN = x$: aire $\dfrac{x(4-x)}{2}$. NCD est rectangle en C, avec $NC = 4 - x$ et $CD = 4$: aire $\dfrac{4(4-x)}{2} = 8 - 2x$.

2. $f(x) = 16 - 2x - \dfrac{4x - x^2}{2} - (8 - 2x) = 8 - 2x + \dfrac{x^2}{2}$, soit $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 8$.

3. $\frac{1}{2}(x-2)^2 + 6 = \frac{1}{2}\big(x^2 - 4x + 4\big) + 6 = \frac{x^2}{2} - 2x + 8 = f(x)$.
Comme $(x-2)^2 \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant 6$, avec égalité pour $x = 2$. L'aire est minimale quand $AM = 2$ cm (M milieu de $[AB]$) ; elle vaut alors 6 cm².

4. Graphiquement : $f(x) = 7$ pour $x \approx 0{,}6$ et $x \approx 3{,}4$; $f(x) \leqslant 6{,}5$ pour $x \in [1{,}3]$.

5. $f(x) = 7 \iff \frac{1}{2}(x-2)^2 = 1 \iff (x-2)^2 = 2 \iff x - 2 = \sqrt{2}$ ou $x - 2 = -\sqrt{2}$: $S = \big\{2 - \sqrt{2}\,;\, 2 + \sqrt{2}\big\}$ (environ 0,59 et 3,41).
$f(x) \leqslant 6{,}5 \iff \frac{1}{2}(x-2)^2 \leqslant 0{,}5 \iff (x-2)^2 \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x - 2 \leqslant 1 \iff 1 \leqslant x \leqslant 3$: $S = [1{,}3]$.

6. Moitié du carré : $f(x) = 8 \iff (x-2)^2 = 4 \iff x = 0$ ou $x = 4$. C'est possible seulement lorsque M est en A ou en B.
Tiers du carré : $\frac{16}{3} \approx 5{,}33 < 6$, alors que l'aire vaut toujours au moins 6 : c'est impossible.