Fiche d'exercices – Stage de Terminale

Spécialité mathématiques – étude de fonction, convexité, découvertes

Étude de fonction • **Convexité** • **Exponentielle & logarithme** • **Intégrales**

Nom :	Prénom :	Date :

★ application directe ★★ une idée ou un calcul en plus ★★★ il faut prendre du recul

Partie 1 – Étude de fonction

Exercice 1 ★★ *(Étude complète d'une fonction)*

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{-x^2}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   Indication : écrire $x\,\mathrm{e}^{-x^2} = \dfrac{1}{x} \times x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ *et poser* $X = x^2$.
2. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = -2(2x+1)(x-1)\,\mathrm{e}^{-x^2}$.
3. Dresser le tableau de variations complet de f.
4. Montrer que f admet sur $\mathbb{R}$ un maximum et un minimum, dont on donnera les valeurs exactes.
5. Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
6. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Partie 2 – Convexité

Exercice 2 ★ *(Convexité d'un polynôme)*

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Étudier la convexité de f et montrer que $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion A, dont on donnera les coordonnées.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en A.
4. Vérifier que $f(x) - (-3x+9) = (x-2)^3$, puis étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T. Commenter.

Exercice 3 ★★ *(Convexité et inégalité)*

Soit $g(x) = x\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
2. Étudier la convexité de g et préciser son point d'inflexion.
3. Déterminer la tangente à la courbe de g en 0. En déduire que pour tout $x \geqslant -2$, $x\,\mathrm{e}^x \geqslant x$.
4. Montrer directement que cette inégalité est vraie pour tout réel x. Commenter.

Exercice 4 ★★ *(L'inégalité $e^x \geqslant 1+x$)*

1. Justifier que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant sa tangente en 0, montrer que pour tout réel x, $e^x \geqslant 1+x$.
3. En appliquant cette inégalité à $x = \dfrac{1}{n}$, montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e$.
4. En l'appliquant à $x = -\dfrac{1}{n+1}$, montrer que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant e$.
5. En déduire la limite de la suite $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$.

Exercice 5 ★★★ *(La fonction logistique)*

Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter.
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$, puis que $f' = f(1-f)$.
3. En dérivant l'égalité $f' = f - f^2$, montrer que $f'' = f'(1-2f)$.
4. Résoudre $1-2f(x) \geqslant 0$. En déduire la convexité de f et son point d'inflexion I.
5. Montrer que pour tout réel x, $f(-x) = 1 - f(x)$. Interpréter graphiquement.
6. Déterminer la tangente à $\mathcal{C}$ en I et la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette tangente.

Partie 3 – Découverte : exponentielle et logarithme

Exercice 6 ★ *(Le logarithme népérien)*

On admet que pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On la note $\ln(a)$ ou $\ln a$: c'est le *logarithme népérien* de a. Ainsi :

$$\text{pour tout } a>0,\ e^{\ln a} = a \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout réel } x,\ \ln\left(e^x\right) = x.$$

1. Pourquoi l'équation $e^x = -2$ n'a-t-elle pas de solution ? Pourquoi $\ln 0$ n'existe-t-il pas ?
2. Donner sans calculatrice : $\ln 1$, $\ln e$, $\ln\left(e^3\right)$, $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$, $\ln\sqrt{e}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^x = 5$; $e^{2x-1} = 3$; $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ (poser $X = e^x$).
4. Résoudre : $\ln x = 2$ (pour $x>0$) ; $\ln(x-1) = 0$ (pour $x>1$).

Exercice 7 ★★ *(Les propriétés du logarithme)*

1. Soient $a,b>0$. Calculer $e^{\ln a + \ln b}$, puis en déduire que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
2. En déduire que pour $a,b>0$: $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$ et $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$. Montrer aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(a^n\right) = n \ln a$.
3. Exprimer en fonction de $\ln 2$: $\ln 8$, $\ln\left(\dfrac{1}{16}\right)$, $\ln\sqrt{2}$, $\ln 6 - \ln 3$.
4. Soient $a,b>0$ avec $a<b$. En raisonnant par l'absurde et en utilisant la croissance de l'exponentielle, montrer que $\ln a < \ln b$. Que peut-on dire de la fonction $\ln$?

5. Application aux suites : déterminer le plus petit entier n tel que $2^n > 1000$, puis le plus petit entier n tel que $0{,}9^n < 0{,}01$.

Exercice 8 ★★ *(Dérivée du logarithme)*

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$.

1. En dérivant les deux membres de l'égalité $\mathrm{e}^{\ln x} = x$, montrer que pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire le sens de variation et la convexité de ln sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminer la tangente à la courbe de ln au point d'abscisse 1. En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$.
4. Comparer avec l'inégalité $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ de l'exercice 4. Comment passe-t-on de l'une à l'autre ?

Partie 4 – Découverte : intégrales

Exercice 9 ★ *(Intégrale et aire)*

Si f est continue et positive sur $[a,b]$, on note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

1. À l'aide d'aires de figures usuelles (rectangle, triangle, trapèze, disque), calculer :

$$\int_0^3 2\,\mathrm{d}x \;;\qquad \int_0^4 x\,\mathrm{d}x \;;\qquad \int_1^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x \;;\qquad \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   Pour la dernière, on pourra remarquer que si $y = \sqrt{4-x^2}$, alors $x^2 + y^2 = 4$.

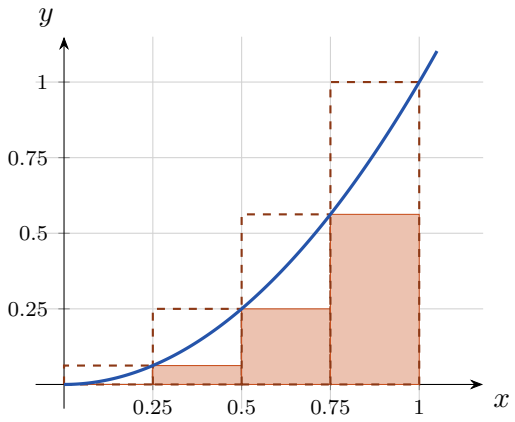
2. Pour $t \geqslant 0$, on pose $A(t) = \displaystyle\int_0^t (2x+1)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $A(t) = t^2 + t$, puis calculer $A'(t)$. Que remarque-t-on ?
3. On admet le résultat suivant : si F est une fonction dérivable telle que $F' = f$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

   a) Retrouver ainsi la valeur de $\displaystyle\int_1^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

   b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser l'exercice 8).

Exercice 10 ★★ *(La méthode des rectangles)*

On cherche l'aire $\mathcal{A}$ du domaine situé sous la courbe de $f(x) = x^2$, entre $x = 0$ et $x = 1$, sans utiliser le résultat admis de l'exercice précédent. On découpe [0,1] en n intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$, et on encadre $\mathcal{A}$ par des rectangles situés sous la courbe (aire totale s_n) et au-dessus (aire totale S_n). La figure montre le cas $n = 4$.



1. Calculer s_4 et S_4, et en déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.
2. Justifier que $s_n = \dfrac{1}{n^3}\left(0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2\right)$ et $S_n = \dfrac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right)$, puis que $S_n - s_n = \dfrac{1}{n}$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. En déduire les limites de (S_n) et de (s_n), puis la valeur de $\mathcal{A}$. Comparer avec l'exercice 9.

Corrections

Partie 1 – Étude de fonction

Exercice 1

1. En $+\infty$: avec $X = x^2 \to +\infty$, $x^2\mathrm{e}^{-x^2} = X\mathrm{e}^{-X} = \dfrac{X}{\mathrm{e}^X} \to 0$ (croissances comparées), donc $x\,\mathrm{e}^{-x^2} = \dfrac{1}{x} \times x^2\mathrm{e}^{-x^2} \to 0 \times 0 = 0$. De plus $\mathrm{e}^{-x^2} \to 0$.
Donc $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-x^2} \to 0$. Le même raisonnement en $-\infty$ (où $X = x^2 \to +\infty$ aussi) donne $f(x) \to 0$.
La droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. $f = uv$ avec $u(x) = 2x - 1$, $v(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $v'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$:

$$f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x^2} + (2x-1)(-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2} = \big(-4x^2 + 2x + 2\big)\mathrm{e}^{-x^2} = -2\big(2x^2 - x - 1\big)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Or $2x^2 - x - 1$ a pour racines 1 et $-\frac{1}{2}$, donc $2x^2 - x - 1 = 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x+1)$, d'où le résultat.

3. $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $-2(2x+1)(x-1)$, positif entre les racines $-\frac{1}{2}$ et 1.
$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\,\mathrm{e}^{-1/4} \approx -1{,}56$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-2\mathrm{e}^{-1/4}$	↗	e^{-1}	↘	0

4. Sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, f décroît depuis la limite 0, donc $f(x) \in \left[-2\mathrm{e}^{-1/4}, 0\right[$. Sur $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, $f(x) \in \left[-2\mathrm{e}^{-1/4}, \mathrm{e}^{-1}\right]$.
Sur $[1, +\infty[$, f décroît vers 0, donc $f(x) \in \left]0, \mathrm{e}^{-1}\right]$.
Ainsi, pour tout réel x, $-2\mathrm{e}^{-1/4} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-1}$, avec égalité en $-\frac{1}{2}$ et en 1 : le minimum de f est $-2\mathrm{e}^{-1/4}$, son maximum est e^{-1}.

5. $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, donc $f(x)$ a le signe de $2x - 1$: $f(x) < 0$ sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $f(x) > 0$ sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

6. $f(0) = -1$ et $f'(0) = -2 \times 1 \times (-1) \times 1 = 2$: $T : y = 2x - 1$.

Partie 2 – Convexité

Exercice 2

1. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ et $f''(x) = 6x - 12$.

2. $f''(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$. Donc f est concave sur $]-\infty, 2]$ et convexe sur $[2, +\infty[$.
f'' s'annule en changeant de signe en 2 : le point $A(2\,;\, f(2)) = A(2\,;\, 3)$ est un point d'inflexion.

3. $f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$, donc $T : y = -3(x-2) + 3$, soit $y = -3x + 9$.

4. $f(x) - (-3x + 9) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$ (identité $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$).
Si $x < 2$, $(x-2)^3 < 0$: $\mathcal{C}$ est sous T. Si $x > 2$: $\mathcal{C}$ est au-dessus de T.
La courbe *traverse* sa tangente au point d'inflexion : c'est ce qui caractérise graphiquement un point d'inflexion.

Exercice 3

1. $g'(x) = \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = (x+1)\,\mathrm{e}^x$ et $g''(x) = \mathrm{e}^x + (x+1)\,\mathrm{e}^x = (x+2)\,\mathrm{e}^x$.
2. $\mathrm{e}^x > 0$, donc $g''(x)$ a le signe de $x+2$: g est concave sur $]-\infty,-2]$, convexe sur $[-2,+\infty[$. Point d'inflexion $B\big(-2\,;\,-2\mathrm{e}^{-2}\big)$.
3. $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$: la tangente en 0 a pour équation $y = x$.
   Sur $[-2,+\infty[$, g est convexe, donc sa courbe est au-dessus de ses tangentes : $x\,\mathrm{e}^x \geqslant x$.
4. $x\,\mathrm{e}^x - x = x\big(\mathrm{e}^x - 1\big)$. Or $\mathrm{e}^x - 1$ a le signe de x (car $\mathrm{e}^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$), donc le produit est toujours positif. L'inégalité est vraie aussi sur $]-\infty,-2]$, où g n'est pas convexe : la convexité est une condition suffisante, pas nécessaire.

Exercice 4

1. $\exp'' = \exp > 0$ sur $\mathbb{R}$: la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. La tangente en 0 a pour équation $y = \mathrm{e}^0(x-0) + \mathrm{e}^0 = x+1$. Une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes : $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$ pour tout réel x.
3. $\mathrm{e}^{1/n} \geqslant 1+\frac{1}{n} > 0$. La fonction $t \mapsto t^n$ est croissante sur $[0,+\infty[$, donc $\big(\mathrm{e}^{1/n}\big)^n \geqslant \big(1+\frac{1}{n}\big)^n$, soit $\mathrm{e} \geqslant \big(1+\frac{1}{n}\big)^n$.
4. $\mathrm{e}^{-1/(n+1)} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} > 0$. En élevant à la puissance $n+1$: $\mathrm{e}^{-1} \geqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$. En passant aux inverses (nombres strictement positifs) : $\mathrm{e} \leqslant \big(\frac{n+1}{n}\big)^{n+1} = \big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1}$.
5. D'après 4, $\big(1+\frac{1}{n}\big)^n \geqslant \dfrac{\mathrm{e}}{1+\frac{1}{n}}$. Avec 3 :

$$\frac{\mathrm{e}}{1+\frac{1}{n}} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}.$$

   La borne de gauche tend vers e : par les gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

Exercice 5

1. En $+\infty$: $\mathrm{e}^{-x} \to 0$, donc $f(x) \to 1$. En $-\infty$: $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$, donc $f(x) \to 0$.
   Asymptotes horizontales $y = 0$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$.
2. $f = \dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = 1+\mathrm{e}^{-x}$, $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, donc $f'(x) = -\dfrac{v'(x)}{v(x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\big(1+\mathrm{e}^{-x}\big)^2}$.
   Par ailleurs $1 - f(x) = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-x}-1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, donc $f(x)\big(1-f(x)\big) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\big(1+\mathrm{e}^{-x}\big)^2} = f'(x)$.
3. $f' = f - f^2$. En dérivant $((f^2)' = 2f'f)$: $f'' = f' - 2ff' = f'(1-2f)$.
4. $1 - 2f(x) \geqslant 0 \iff f(x) \leqslant \frac{1}{2} \iff 1+\mathrm{e}^{-x} \geqslant 2 \iff \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 \iff x \leqslant 0$.
   Comme $f'(x) > 0$, $f''(x)$ a le signe de $1-2f(x)$: f est convexe sur $]-\infty,0]$ et concave sur $[0,+\infty[$.
   Point d'inflexion : $I\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
5. $f(-x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ et $1 - f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ (on multiplie en haut et en bas par e^x). D'où l'égalité.
   Elle s'écrit $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = \dfrac{1}{2}$: le point I est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
6. $f'(0) = f(0)\big(1-f(0)\big) = \frac{1}{4}$: tangente $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.
   $\mathcal{C}$ est au-dessus de cette tangente sur $]-\infty,0]$ (convexité) et en dessous sur $[0,+\infty[$ (concavité).

Partie 3 – Découverte : exponentielle et logarithme

Exercice 6

1. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, donc e^x ne peut pas valoir -2, ni 0 : $\ln 0$ n'est pas défini (le logarithme n'est défini que sur $]0,+\infty[$).
2. $\ln 1 = 0$ (car $\mathrm{e}^0 = 1$), $\ln \mathrm{e} = 1$, $\ln\left(\mathrm{e}^3\right) = 3$, $\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = -1$, $\ln\sqrt{\mathrm{e}} = \ln\left(\mathrm{e}^{1/2}\right) = \frac{1}{2}$.
3. $\mathrm{e}^x = 5 \iff x = \ln 5$. $\mathrm{e}^{2x-1} = 3 \iff 2x - 1 = \ln 3 \iff x = \dfrac{1+\ln 3}{2}$.
   Avec $X = \mathrm{e}^x > 0$: $X^2 - 3X + 2 = 0 \iff (X-1)(X-2) = 0 \iff X = 1$ ou $X = 2$. Donc $\mathrm{e}^x = 1$ ou $\mathrm{e}^x = 2$: $S = \{0\,;\ln 2\}$.
4. $\ln x = 2 \iff x = \mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{e}^2$: $S = \left\{\mathrm{e}^2\right\}$. $\ln(x-1) = 0 \iff x - 1 = \mathrm{e}^0 = 1 \iff x = 2$ (qui vérifie $x > 1$).

Exercice 7

1. $\mathrm{e}^{\ln a + \ln b} = \mathrm{e}^{\ln a} \times \mathrm{e}^{\ln b} = ab$. Donc $\ln a + \ln b$ est la solution de $\mathrm{e}^x = ab$, c'est-à-dire $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
2. $\ln a + \ln \frac{1}{a} = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0$, donc $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$. Puis $\ln \frac{a}{b} = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.
   $\mathrm{e}^{n \ln a} = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^n = a^n$, donc $\ln\left(a^n\right) = n \ln a$.
3. $\ln 8 = \ln\left(2^3\right) = 3\ln 2$; $\ln \frac{1}{16} = -\ln\left(2^4\right) = -4\ln 2$; $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ donne $2\ln\sqrt{2} = \ln 2$, soit $\ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$; $\ln 6 - \ln 3 = \ln \frac{6}{3} = \ln 2$.
4. Supposons $\ln a \geqslant \ln b$. L'exponentielle étant croissante, $\mathrm{e}^{\ln a} \geqslant \mathrm{e}^{\ln b}$, soit $a \geqslant b$: contradiction. Donc $\ln a < \ln b$.
   La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$: pour a,$b > 0$, $a < b \iff \ln a < \ln b$.
5. $2^n > 1000 \iff \ln\left(2^n\right) > \ln 1000 \iff n\ln 2 > \ln 1000 \iff n > \dfrac{\ln 1000}{\ln 2} \approx 9{,}97$ (car $\ln 2 > 0$). Le plus petit entier est $n = 10$ ($2^{10} = 1024$).
   $0{,}9^n < 0{,}01 \iff n \ln 0{,}9 < \ln 0{,}01 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}9} \approx 43{,}7$, **car** $\ln 0{,}9 < 0$ (le sens change). Le plus petit entier est $n = 44$.

Exercice 8

1. La dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{\ln x}$ est $x \mapsto \ln'(x)\,\mathrm{e}^{\ln x} = x\ln'(x)$ (dérivée de e^u). Celle de $x \mapsto x$ vaut 1. Donc $x\ln'(x) = 1$, soit $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ sur $]0,+\infty[$: ln est strictement croissante (on retrouve l'exercice 7). $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$: ln est concave sur $]0,+\infty[$.
3. $\ln 1 = 0$, $\ln'(1) = 1$: la tangente en 1 a pour équation $y = x - 1$. Une fonction concave est en dessous de ses tangentes : $\ln x \leqslant x - 1$ pour tout $x > 0$.
4. On applique $\mathrm{e}^y \geqslant 1 + y$ à $y = \ln x$: $x \geqslant 1 + \ln x$, soit $\ln x \leqslant x - 1$. Les deux inégalités se correspondent : les courbes de exp et de ln sont symétriques par rapport à la droite $y = x$, et leurs tangentes $y = x + 1$ et $y = x - 1$ aussi.

Partie 4 – Découverte : intégrales

Exercice 9

1. $\int_0^3 2\,\mathrm{d}x$: rectangle 3×2, aire 6.
$\int_0^4 x\,\mathrm{d}x$: triangle rectangle de côtés 4 et 4, aire $\frac{4\times 4}{2}=8$.
$\int_1^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x$: trapèze de bases $f(1)=3$ et $f(3)=7$, de hauteur 2 : aire $\frac{(3+7)\times 2}{2}=10$.
$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$: les points $(x\,;y)$ de la courbe vérifient $x^2+y^2=4$ et $y\geqslant 0$: c'est le demi-cercle de centre O et de rayon 2. Aire du demi-disque : $\frac{\pi\times 2^2}{2}=2\pi$.

2. Trapèze de bases $f(0)=1$ et $f(t)=2t+1$, de hauteur t : $A(t)=\dfrac{(1+2t+1)\,t}{2}=t^2+t$. Alors $A'(t)=2t+1=f(t)$: la dérivée de la fonction « aire » est la fonction f elle-même.

3. **a)** $F(x)=x^2+x$ vérifie $F'(x)=2x+1$: $\int_1^3(2x+1)\,\mathrm{d}x=F(3)-F(1)=12-2=10$. On retrouve le résultat de la question 1.
b) $F(x)=\frac{x^3}{3}$ a pour dérivée x^2 : $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$.
$\exp'=\exp$: $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0=\mathrm{e}-1$.
$\ln'(x)=\frac{1}{x}$ (exercice 8) : $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln\mathrm{e}-\ln 1=1$.

Exercice 10

1. Les rectangles ont pour largeur $\frac{1}{4}$. $s_4=\frac{1}{4}\left(0+\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{9}{16}\right)=\frac{14}{64}=\frac{7}{32}$ et $S_4=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{9}{16}+\frac{16}{16}\right)=\frac{30}{64}=\frac{15}{32}$.
Donc $0{,}218\,75\leqslant\mathcal{A}\leqslant 0{,}468\,75$.

2. Sur $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$, f est croissante : le rectangle du dessous a pour hauteur $f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{k^2}{n^2}$, celui du dessus $f\left(\frac{k+1}{n}\right)=\frac{(k+1)^2}{n^2}$. Avec la largeur $\frac{1}{n}$:

$$s_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\times\frac{k^2}{n^2}=\frac{1}{n^3}\left(0^2+\cdots+(n-1)^2\right),\qquad S_n=\frac{1}{n^3}\left(1^2+\cdots+n^2\right).$$

$S_n-s_n=\dfrac{n^2-0^2}{n^3}=\dfrac{1}{n}$.

3. $P(n)$: « $1^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ». **Initialisation.** $1^2=1=\frac{1\times 2\times 3}{6}$.
Hérédité. Si $P(k)$ est vraie :

$$1^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)\left(2k^2+7k+6\right)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

car $(k+2)(2k+3)=2k^2+7k+6$. C'est $P(k+1)$.

4. $S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\dfrac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\to\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$, et $s_n=S_n-\frac{1}{n}\to\frac{1}{3}$.
Comme $s_n\leqslant\mathcal{A}\leqslant S_n$ pour tout n, en passant à la limite : $\mathcal{A}=\dfrac{1}{3}$. C'est bien la valeur $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$ trouvée à l'exercice 9.